

Invariance combinatoire des polynômes de Kazhdan-Lusztig sur les intervalles partant de l'origine

Ewan Delanoy *

February 1, 2008

Abstract

We show that for Bruhat intervals starting from the origin in Coxeter groups the conjecture of Lusztig and Dyer holds, that is, the R -polynomials and the Kazhdan-Lusztig polynomials defined on $[e, u]$ only depend on the isomorphism type of $[e, u]$. To achieve this we use the purely poset-theoretic notion of special matching. Our approach is essentially a synthesis of the explicit formula for special matchings discovered by Brenti and the general special matching machinery developed by Du Cloux.

1 Introduction

À l'heure actuelle la question posée indépendamment par Dyer [7] et Lusztig de savoir si le polynôme de Kazhdan-Lusztig $P_{u,v}$ défini sur un intervalle de Bruhat $[u, v]$ ne dépend en fait que de la classe d'isomorphisme du poset $[u, v]$, reste un problème ouvert dans le cas général (voir [8] pour toutes les définitions concernant l'ordre de Bruhat et les polynômes P et R associés à un groupe de Coxeter). On peut reformuler le problème de la manière suivante : est-ce que pour tout isomorphisme de posets ψ entre deux intervalles de Bruhat,

*Institut Girard Désargues
UMR 5028 CNRS
Université Lyon 1
69622 Villeurbanne Cedex France
delanoy@igd.univ-lyon1.fr

$\psi : [u, v]_W \rightarrow [u', v']_{W'}$, ψ préserve les polynômes de Kazhdan-Lusztig i.e.

$$\forall x, y \in [u, v], P_{x,y} = P_{\psi(x), \psi(y)} \quad (1.1)$$

Brenti [1] a traité le cas adihédral (i.e. le cas où le poset $[u, v]$ ne contient pas d'intervalle isomorphe au poset \mathfrak{S}_3 vu comme groupe de Coxeter muni de l'ordre de Bruhat). Nous montrons dans cet article que le cas particulier correspondant à $u = u' = e$ est vrai :

$$\forall x, y \in [e, v], P_{x,y} = P_{\psi(x), \psi(y)} \quad (1.2)$$

Des sous-cas de ce cas particulier ont déjà été démontrés : la référence [5] traite le cas où W est tel que toutes les composantes connexes de son graphe de Coxeter sont des arbres ou de type \tilde{A}_n et [2] traite le cas où W et W' sont de type A_n . On sait qu'il existe un algorithme permettant de calculer les polynômes P à partir d'une famille de polynômes plus élémentaires, les polynômes R (cf. par exemple 2, théorème 2.6.iv) ; cet algorithme qui n'utilise que la structure de poset des intervalles de Bruhat montre que (1.2) équivaut à

$$\forall x, y \in [e, v], R_{x,y} = R_{\psi(x), \psi(y)} \quad (1.3)$$

Pour montrer un résultat d'invariance par isomorphisme de posets, on cherche tout naturellement à définir de manière purement combinatoire les polynômes R ; ce qui a conduit Du Cloux et Brenti à la notion de "couplage distingué", que nous explicitons un peu plus loin. Étant donné un générateur s , les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par s constituent des exemples fondamentaux de couplages distingués ; nous les appelons des couplages distingués *de multiplication*. Par un raisonnement commun à [3, définition 6.5] et [2, corollaire 5.3], on montre que l'assertion (1.3) est impliquée par l'assertion suivante portant les couplages distingués ϕ d'un intervalle partant de l'origine $[e, v]$ (bien connue lorsque ϕ est un couplage de multiplication):

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in [e, v], \text{ tels que } x \triangleleft \phi(x), y \triangleleft \phi(y), \\ & \begin{cases} R_{\phi(x), \phi(y)} = R_{x,y} \\ R_{x, \phi(y)} = (q-1)R_{x,y} + qR_{\phi(x), y} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

C'est ce résultat que nous démontrons dans cet article (corollaire 7.4).

L'idée de départ de la démonstration, déjà contenue dans [2], est la suivante : prenons (x, y) comme en (1.4), et $s \in S$ dans l'ensemble de descente à gauche de y tel que ϕ commute avec la multiplication à gauche par s . Alors la formule (1.4) pour (x, y) se déduit de formules (1.4) correspondant à des (x', y') avec $l(y') < l(y)$, ce qui permet de raisonner par récurrence sur la longueur de y (proposition 3.5). Il n'est pas vrai en général que tout $y \in W$ admette une telle réduction (à gauche ou à droite). Mais ce sera vrai pour tout élément "suffisamment grand". Plus précisément, disons que y est *plein* si $[e, y]$ contient

tous les éléments diédraux de W (définition 3.1). Alors nous démontrons *in fine* que si W n'est pas diédral, tout élément plein de W est réductible au sens ci-dessus. Si w est non plein, il est prouvé dans [5] que l'intervalle $[e, w]$ est isomorphe à un intervalle $[e, w']$ dans un autre groupe de Coxeter W' “plus petit” en un sens convenable par un isomorphisme préservant les polynômes R , avec w' plein, ce qui permet de faire une récurrence sur la taille du groupe de Coxeter.

Dans tous les raisonnements, les éléments diédraux du groupe jouent un rôle essentiel. À la section 2 nous montrons qu'un couplage est entièrement caractérisé par sa restriction aux éléments diédraux de son domaine de définition, et même par sa restriction à l'ensemble P des éléments diédraux principaux (théorème 2.6). Réciproquement tout couplage ϕ défini sur P se prolonge de manière unique en un couplage (encore noté ϕ) dont le domaine est maximal ; ce domaine uniquement défini est noté $\text{dom}(\phi)$. De même, à la section 4 on verra que la commutation d'un couplage avec l'opérateur de multiplication par un générateur se lit sur P (proposition 4.1).

Pour que $\text{dom}(\phi)$ contienne un élément plein, il faut que la restriction de ϕ à chaque sous-groupe diédral principal ne soit “pas trop éloignée” d'un couplage de multiplication : nous verrons à la section 7 qu'il existe au plus un sous-groupe diédral principal D tel que la restriction de ϕ à D ne soit pas un couplage de multiplication, et que même sur ce D ϕ doit encore partager avec les couplages de multiplication certaines conditions de régularité.

Sur le plan technique, une idée essentielle consiste à mettre en évidence des “obstructions” (élément minimaux du complémentaire de $\text{dom}(\phi)$) chaque fois que ϕ n'est pas un couplage de multiplication. Par exemple, si $a = \phi(e)$ et $x_0 \in P$ est un élément minimal tel que $\phi(x_0) \neq x_0 a$, on peut exhiber des obstructions obtenues en insérant un caractère bien choisi dans une écriture réduite de x_0 (ceci est illustré par les propositions 6.3.1 et 6.4.2). Comme le domaine $\text{dom}(\phi)$ est filtrant décroissant, chaque nouvelle obstruction impose une diminution conséquente de $\text{dom}(\phi)$, pour finalement empêcher $\text{dom}(\phi)$ de contenir un élément plein lorsque ϕ est trop différent d'un couplage de multiplication, ce qui permet de faire aboutir le raisonnement.

Il est remarquable que les seules obstructions dont nous avons besoin proviennent toutes de sous-groupes de rang 3 de W . À la section 5 nous décrivons les obstructions en quelque sorte les plus simples que l'on puisse rencontrer et la réduction correspondante du domaine Q , qui apparaît dans le cas dit “croisé”, qui règle déjà le cas des groupes de Coxeter simplement enlacés (cf corollaire 7.2). La section 6, consacrée au cas du rang 3, fournit des armes pour l'attaque du cas général (section 7). La découverte des obstructions en rang 3 a été largement guidée par des calculs effectués à l'aide d'une version spécialisée du programme **Coxeter** [4].

Plan de la suite de l'article :

- §2. Résultats généraux
- §3. Formules de descente pour les polynômes R
- §4. Critères de régularité
- §5. Réduction du domaine dans le cas croisé
- §6. Étude partielle du cas des groupes de rang 3
- §7. Cas général

2 Résultats généraux

Soit $(P, <)$ un poset. On écrit $x \triangleleft y$ pour exprimer que $x < y$ et qu'il n'existe pas de z tel que $x < z < y$. On dit alors que x est un **coatome** de y ; on note **coat**(y) l'ensemble des coatomes d'un élément $y \in P$. Tous les posets considérés ici seront **gradués**, i.e. munis d'une fonction $l : P \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant $l(y) = l(x) + 1$ dès que $x \triangleleft y$ (en fait, ne sont considérés ici que des posets gradués en général sans aucune autre restriction ou bien, dans le cadre d'un système de Coxeter (W, S) , on regardera toujours W comme étant muni de sa structure de poset gradué provenant de l'ordre de Bruhat et de la fonction longueur usuelle).

Soit $\phi : P \rightarrow P$ une application. Nous dirons que ϕ est un **couplage distingué** si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

- (i) ϕ est involutive ($\forall u \in P, \phi(\phi(u)) = u$)
- (ii) $\forall u \in P, u \triangleleft \phi(u)$ ou $\phi(u) \triangleleft u$
- (iii) $\forall u \in P, (u \triangleleft \phi(u)) \Rightarrow (\text{coat}(\phi(u)) = \{u\} \cup \{\phi(v) ; v \triangleleft u, v \triangleleft \phi(v)\})$.

La condition (iii) est la plus significative, les autres ne font que poser le cadre. Nous utiliserons l'abréviation

$$Z(\phi, u) = \{u\} \cup \{\phi(v) ; v \triangleleft u, v \triangleleft \phi(v)\}$$

Si la terminologie est due à Brenti [2], le choix de la définition (parmi un certain nombre qui sont équivalentes) vient plutôt de du Cloux [3]. Les parties (i) et (ii) de la définitions sont communes à [2] et à [3] ; la partie (iii) par contre n'est énoncée explicitement ni dans [2] ni dans [3], mais il est facile de voir qu'elle est équivalente aux versions données dans chacun de ces articles.

Si l'on prend Q , une partie **filtrante décroissante** de P (i.e. vérifiant $\forall (q, x) \in Q \times P, (x \leq q) \Rightarrow (x \in Q)$), on peut relativiser cette notion comme suit : on dit qu'un couple (Q, s) est un couplage (distingué) **partiel** si $Q \subseteq P$ est filtrante décroissante, et s est une application $Q \rightarrow Q$ telle que sa restriction constitue un couplage distingué du sous-poset Q . On note $Q = \text{dom}(s)$.

Soit $\mathcal{I}(P)$ l'ensemble des couplages partiels de P ; on a une relation d'ordre $\leq_{\mathcal{I}}$ naturelle sur $\mathcal{I}(P)$, à savoir $(Q_1, s_1) \leq_{\mathcal{I}} (Q_2, s_2)$ ssi $Q_1 \subseteq Q_2$ et s_2 étend s_1 .

Nous appelons **couplages maximaux** les éléments qui sont maximaux pour $\leq_{\mathcal{I}}$. On peut descendre d'un degré encore dans la relativité en introduisant pour $Q \subseteq P$ filtrante décroissante la notion de **couplage Q -maximal de P** : les couplages partiels s de P ayant cet épithète sont ceux vérifiant la condition $\forall s' \text{ étendant } s, \text{dom}(s) \cap Q = \text{dom}(s') \cap Q$.

Si on suppose Q finie, toute chaîne finie $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r$ avec chaque ϕ_{i+1} étendant ϕ_i et $\forall i, \text{Dom}(\phi_i) \cap Q \subset \text{Dom}(\phi_{i+1}) \cap Q$ (inclusion stricte) est nécessairement de cardinal $\leq |Q|$ et si cette chaîne est de longueur maximale son dernier élément est un couplage Q -maximal ; donc :

Remarque 2.1 *Soit P un poset gradué, Q une partie filtrante décroissante finie de P . Alors tout couplage partiel de P se prolonge en un couplage Q -maximal.*

Commençons par donner un résultat de “passage du local au global” :

Théorème 2.2 *Soit P un poset gradué tel que $\{x \in P ; l(x) = k\}$ soit fini pour tout k . Si A est une partie filtrante décroissante de P , alors tout couplage partiel α défini sur A se prolonge en un couplage maximal sur P . Si de plus la fonction coat est injective sur $P \setminus A$, alors cette extension est unique.*

Preuve : Existence.

Pour chaque k notons $B_k = \{x \in P ; l(x) \leq k\}$. Par la remarque 2.1, α admet une extension ϕ_0 qui est B_0 -maximale. En itérant cette même remarque 2.1, on construit une suite $(\phi_n)_{n \geq 0}$ de couplages partiels de P tels que

$$\forall n \geq 1, \phi_n \text{ étend } \phi_{n-1}, \phi_n \text{ est } B_n - \text{maximale.}$$

Une fois cette suite (ϕ_n) construite, définissons $Q = \bigcup \text{Dom}(\phi_n)_{n \geq 0}$, $\phi : Q \rightarrow Q$ par $\forall x \in Q, \phi(x) = \phi_n(x)$ si $x \in \text{Dom}(\phi_n)$. Alors ϕ est bien définie et est un couplage maximal étendant α , comme cherché.

Unicité (dans le cas coat injective sur $P \setminus A$).

Supposons par l'absurde que l'on ait deux couplages maximaux distincts μ_1 et μ_2 qui étendent α . Prenons alors w de longueur minimale tel que μ_1 diffère de μ_2 en w , i.e. (quitte à échanger μ_1 et μ_2)

- Cas 1 : $w \in \text{Dom}(\mu_1), w \in \text{Dom}(\mu_2), \mu_1(w) \neq \mu_2(w)$, ou bien
- Cas 2 : $w \in \text{Dom}(\mu_1), w \notin \text{Dom}(\mu_2)$.

Considérons le cas 1. On a certainement $w \notin A$; et comme μ_1, μ_2 sont involutives, on doit avoir $w \triangleleft \mu_1(w), w \triangleleft \mu_2(w), \mu_1(w) \notin A, \mu_2(w) \notin A$. Alors la condition (iii) de la définition d'un couplage maximal donne $\text{coat}(\mu_1(w)) =$

$\text{coat}(\mu_2(w))$ puis $\mu_1(w) = \mu_2(w)$ qui est exclu.

Passons au cas 2. De manière analogue au cas 1, on voit que $w \notin A, w \triangleleft \mu_1(w), \mu_1(w) \notin A$. On a même $\mu_1(w) \notin \text{Dom}(\mu_2)$ (car $\text{Dom}(\mu_2)$ est filtrante décroissante et $w \notin \text{Dom}(\mu_2)$). Considérons $Q = \text{Dom}(\mu_2) \cup \{w; \mu_1(w)\}$ et $\phi : Q \rightarrow Q$ définie par $\phi(x) = \mu_2(x)$ si $x \in \text{Dom}(\mu_2)$ et $\phi(x) = \mu_1(x)$ si $x \in \{w; \mu_1(w)\}$. Alors ϕ est un couplage partiel qui étend strictement μ_2 ce qui contredit la maximalité de ce dernier. Q. E. D.

Nous allons maintenant quitter le monde des posets généraux et abstraits pour nous restreindre jusqu'à la fin de cet article au cas particulier où P provient d'un système de Coxeter (W, S) de la manière suivante : $P = W$, la relation d'ordre est l'ordre de Bruhat-Chevalley, la longueur est la fonction longueur usuelle sur un groupe de Coxeter.

Dans ce cas particulier précis, le théorème 2.2 prend une forme plus fine. Étant donné un système de Coxeter (W, S) , on appelle **sous-groupe diédral** de W tout sous-groupe $\langle s, t \rangle$ où $\{s, t\}$ est une paire d'éléments de S . Un élément $w \in W$ est dit **élément diédral** si il appartient à un sous-groupe diédral, ou bien de manière équivalente, si w s'écrit

$$w = \underbrace{sts \dots}_{m \text{ termes}}$$

pour un certain entier m et une certaine paire $\{s, t\} \subseteq S$. Comme les éléments diédraux apparaissent à chaque instant dans ce travail, nous introduisons tout de suite les notations suivantes : pour toute paire $\{s, t\} \subseteq S$ on note

$$\begin{aligned} [s, t, n] &= \underbrace{stst \dots}_{n \text{ termes}} \\ \langle n, t, s \rangle &= \underbrace{\dots tsts}_{n \text{ termes}} \\ M_{st} &= [s, t, m_{st}] = \langle m_{st}, t, s \rangle \text{ si } m_{st} < \infty. \end{aligned}$$

Rappelons deux résultats démontrés ailleurs par Dyer et Waterhouse respectivement :

Proposition 2.3 *Soit (W, S) un système de Coxeter.*

- 1) *Pour $w \in W$, $(w \text{ est diédral}) \Leftrightarrow (|\text{coat}(w)| \leq 2)$.*
- 2) *Si x et y dans W vérifient $\text{coat}(x) = \text{coat}(y) = A$ et $|A| \geq 3$, alors $x = y$.*

Preuve : Consulter [7, proposition 7.25] pour la première assertion et [9, proposition 7] pour la deuxième. Q. E. D.

Cette proposition fait pressentir l'importance des éléments diédraux ; en fait, nous devons encore introduire la notion d'**élément diédral principal**: si (Q, ϕ) est un couplage partiel avec $Q \neq \emptyset$, alors $e \in Q$ et par la règle (iii),

$a = \phi(e)$ est un élément de S . Nous appelons **sous-groupes diédraux principaux** les $P_s = \langle s, a \rangle$ pour $s \in S \setminus \{a\}$; et les éléments diédraux principaux sont les éléments de

$$P = \bigcup_{s \in S \setminus \{a\}} P_s.$$

Commençons par préciser l'action d'un couplage maximal sur un sous-groupe diédral :

Proposition 2.4 *Soit (W, S) un système de Coxeter, et $c = (Q, \phi)$ un couplage maximal sur W , D un sous-groupe diédral de W .*

- (i) *Si D est principal, alors ϕ est défini sur tout D et D est stable par ϕ .*
- (ii) *Si D est non principal, alors*

$$\forall w \in Q \cap D, \text{ on a } w \triangleleft \phi(w), \phi(w) \notin D.$$

Preuve : Soit $s \in S \setminus \{a\}$ et $m = m(a, s)$ (coefficient entier ou infini de la matrice de Coxeter). Rappelons que P_s a un unique élément de longueur 0, un ou pas d'élément de longueur m suivant que m est fini ou non, et deux éléments en longueur j pour $0 < j < m$. Pour $w \in P_s$ tel que $0 < l(w) < m$, on notera \bar{w} l'unique élément de P_s de même longueur que, mais différent de, w .

Montrons (i), c'est à dire

$$\forall w \in P_s, w \in Q, \phi(w) \in P_s.$$

On raisonne par récurrence sur $j = l(w)$. Si $j = 0$, on a $w = e$ donc $\phi(w) = a$ et le résultat est clair. Si $j = 1$, on a $w = a$ (et alors $\phi(w) = e$) ou bien $w = s$ (et alors $Z(\phi, w) = \{a; s\}$, donc $\phi(w) \in \{as; sa\} \subseteq P_s$).

Soit maintenant $j \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour les longueurs $< j$. Soit $w \in P_s$ tel que $l(w) = j$. Si $\phi(w) \triangleleft w$, on a certainement $\phi(w) \in P_s$ car P_s est filtrante décroissante. Sinon $w \triangleleft \phi(w)$ (ou bien $\phi(w)$ n'est pas défini). En prenant un coatome v de w , on a $\text{coat}(w) = \{v; \bar{v}\}$ car $j \geq 2$, donc $Z(\phi, w) = \{w\} \cup \phi(B)$ ou l'on a posé $B = \{z \in \{v; \bar{v}\} ; z \triangleleft \phi(z)\}$.

Si $B = \{v; \bar{v}\}$ alors ϕ induirait une bijection $\{v; \bar{v}\} \rightarrow \{w; \bar{w}\}$ ce qui est exclu car $w \triangleleft \phi(w)$. Ainsi $B \neq \{v; \bar{v}\}$.

Supposons $B = \emptyset$. Alors en posant $u = \phi(v)$ on a $\phi(v) = u \triangleleft v$, $\phi(\bar{v}) = \bar{u} \triangleleft \bar{v}$. De plus, comme ϕ est un couplage distingué on doit avoir $\text{coat}(\phi(u)) = Z(\phi, u)$ c'est-à-dire $\text{coat}(v) = \{u\} \cup \phi(B')$ ou l'on a posé $B' = \{z \in \text{coat}(u) ; z \triangleleft \phi(z)\}$. Or $\text{coat}(v) = \{u; \bar{u}\}$, donc $\bar{u} \in \phi(B')$, donc $\phi(\bar{u}) \in B'$, donc $l(\phi(\bar{u})) = l(u) - 1$ qui contredit $\bar{u} \triangleleft \phi(\bar{u})$. Ainsi $B \neq \emptyset$.

Finalement $|B| = 1$ et par exemple $B = \{v\}$. Alors nécessairement $\phi(v) = \bar{w}$ donc $Z(\phi, w) = \{w; \bar{w}\}$. Par conséquent $\phi(w)$ est défini et est dans P_s , par la proposition 2.3. Ceci achève la preuve par récurrence et montre (i).

Montrons maintenant (ii). Supposons par l'absurde que l'on ait $w \in D$ tel que $\beta(w) \in D$ (cas 1) ou tel que $\beta(w) \triangleleft w$ (cas 2); on prend pour w un contre-exemple de longueur minimale. Supposons que w est dans le cas 2. Alors $\beta(w)$

est dans ce qu'on a appelé le cas 1, ce qui contredit la minimalité de w . Ainsi w est dans le cas 1, et pas dans le cas 2 : $w \triangleleft \beta(w), \beta(w) \in D$. Remarquons que $w \neq e$ car $\phi(e) = a$. Soit u un coatome de w ; alors par minimalité de w , $u \triangleleft \beta(u), \beta(u) \notin D$, donc $\beta(u) \in Z(\phi, w)$. Mais alors $\beta(u) \triangleleft \beta(w)$, $\beta(u) \notin D, \beta(w) \in D$ ce qui est absurde. Q. E. D.

Proposition 2.5 *Soit (W, S) un système de Coxeter, β et γ deux couplages maximaux sur W , et $w \in W$. Supposons que l'on ait :*

$$\forall v \in [e, w] \cap P, \beta(v) = \gamma(v)$$

Alors

$$\forall w \in W, \beta(w) = \gamma(w) \\ \text{(ou bien } \beta(w) \text{ et } \gamma(w) \text{ sont tous deux non définis).}$$

Preuve : Supposons que la proposition soit fausse ; prenons alors un contre-exemple w de longueur minimale. En raisonnant comme à la partie “unicité” du théorème 2.2, on voit que ce contre-exemple w vérifie nécessairement $\beta(w) \neq \gamma(w)$, $w \triangleleft \beta(w)$, $w \triangleleft \gamma(w)$, $\text{coat}(\beta(w)) = \text{coat}(\gamma(w))$. Par la proposition 2.3, ceci implique que $\beta(w)$ et $\gamma(w)$ sont deux éléments d'un même sous-groupe diédral D . Ce sous-groupe ne peut être principal puisque par hypothèse β et γ coïncident sur $P \cap [e, w]$. Mais alors 2.4.(ii) montre que $\beta(w) \notin D$ ce qui est absurde. Q. E. D.

En combinant les deux propositions précédentes on obtient :

Théorème 2.6 *Soit (W, S) un système de Coxeter.*

- (i) *Pour tout couplage maximal ϕ sur W , chaque sous-groupe diédral principal P_s est stable par ϕ , d'où un couplage induit ϕ_s sur P_s .*
- (ii) *Réciproquement, pour toute famille $(\alpha_s)_{s \neq a}$ avec chaque α_s un couplage sur P_s tel que $\alpha_s(e) = a$, on a un unique couplage maximal ϕ qui étend la réunion des α_s : $\forall s, \phi|_{P_s} = \alpha_s$.*

Preuve : Le (i) n'est bien sûr qu'une répétition de 2.4.(i).

Montrons maintenant le resultat d'extension unique. Tout d'abord, $P = \bigcup P_s$ est filtrant décroissant, d'où un couplage partiel $\alpha : P \rightarrow P$; ceci nous donne déjà l'existence de ϕ par la partie “existence” du théorème 2.2. L'unicité découle de la proposition 2.5. Q. E. D.

3 Formules de descente pour les polynômes R

Comme annoncé dans l'introduction, nous utilisons librement ici les propriétés élémentaires des polynômes R , nous référant à [8] pour toute explication

supplémentaire.

Pour s dans S on note $L_s = \{w \in W; l(sw) > l(w)\}$. Les formules suivantes qui donnent lieu à une méthode de calcul des polynômes $R_{u,v}$ sont bien connues : pour $x, y \in L_s$, on a

$$R_{sx, sy} = R_{x, y} \quad (3.1.1)$$

$$R_{x, sy} = (q - 1)R_{x, y} + qR_{sx, y} \quad (3.1.2)$$

L'idée est d'essayer de montrer que ces formules restent valables, *mutatis mutandis*, lorsque l'on remplace s par un couplage distingué quelconque.

Définition 3.1 Soit (W, S) un système de Coxeter et $w \in W$. On dit que w est **plein par rapport à** $J \subseteq S$ si $\forall s, t \in J$, $m_{st} < \infty$, $M_{st} \leq w$. On dit que w est **plein** s'il est plein par rapport à S .

Lemme 3.2 Soit (W, S) un système de Coxeter, $J \subseteq S$, $w \in W$ plein par rapport à J . Alors il existe $v \in \langle J \rangle$ plein par rapport à J tel que $v \leq w$.

Preuve : On sait que $[e, w] \cap \langle J \rangle$ a un plus grand élément v (cf. par exemple [3, proposition 2.5]) ; montrons que v répond à la question. On a certainement $v \leq w$. De plus, si s et t sont deux éléments distincts de J et $\mu = M_{st}$ l'élément diédral maximal associé, on a $\mu \in [e, w] \cap \langle J \rangle$ donc $\mu \leq v$. Ceci étant vrai pour tous les s et t , v est plein par rapport à $\langle J \rangle$. Q. E. D.

Nous avons maintenant besoin des ensembles de descente à gauche et à droite d'un élément w de W : ce sont respectivement $\{s \in S ; sw \triangleleft w\}$ et $\{s \in S ; ws \triangleleft w\}$. On les note $D_g(w)$ et $D_d(w)$ dans la suite de cet article.

Définition 3.3 Si $s \in S$ et $c = (Q, \phi)$ est un couplage, on dit que s est **c-régulier** (à gauche) ou que c est **s-régulier** (en toute rigueur la notion de régularité concerne le couple (s, c)) si

- (i) Q est stable par $(x \mapsto sx)$,
- et
- (ii) $\forall x \in Q, \phi(sx) = s\phi(x)$.

Bien entendu, on a une définition analogue à droite.

Définition 3.4 Soit (W, S) un système de Coxeter et $c = (Q, \phi)$ un couplage maximal de W ; soit ω une orbite dans Q pour l'action de l'involution ϕ . Alors ω peut s'écrire $\omega = \{m, M\}$ avec $m \triangleleft M$, $\phi(m) = M$. L'orbite ω est dite **pleine** si M est plein. On dit que ω est une **orbite réductible à gauche** pour c si il existe s régulier à gauche dans l'ensemble de descente à gauche de m . De même, ω est une **orbite réductible à droite** pour c si il existe s régulier à droite dans

l'ensemble de descente à droite de m . L'orbite ω est dite **orbite réductible** si elle est réductible à gauche ou à droite. Enfin, c est un **couplage réductible** si $|S| \leq 2$ ou si toute orbite pleine est réductible.

On étend l'addition et la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ à $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ par $x \leq \infty$ et $x + \infty = \infty$ pour $x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Le résultat essentiel de cet section s'énonce ainsi :

Proposition 3.5 *Soit (W, S) un système de Coxeter ayant la propriété suivante : pour tout système de Coxeter (W', S) associé à une matrice de Coxeter M' vérifiant $\forall s, t \in S, m'_{st} \leq m_{st}$, on a que tout couplage maximal de W' est réductible. Soit alors $c = (Q, \phi)$ un couplage distingué de W . Définissons l'ensemble $L_\phi = \{w \in Q ; w \triangleleft \phi(w)\}$. Alors, pour $(x, y) \in L_\phi^2$, on a*

$$R_{\phi(x), \phi(y)} = R_{x, y} \quad (3.5.1)$$

$$R_{x, \phi(y)} = (q - 1)R_{x, y} + qR_{\phi(x), y} \quad (3.5.2)$$

Preuve de la proposition. Tout d'abord, remarquons que quand $|S| \leq 2$, on a l'équivalence $(u < v) \Leftrightarrow (l(u) < l(v))$, d'où on déduit assez facilement que $R_{u, v}$ ne dépend que de $l(v) - l(u)$ (on peut par exemple définir une suite de polynômes $(L_i(q))$ par $L_0 = 1, L_1 = q, \forall n \geq 2 L_n = (q - 1)L_{n-1} + qL_{n-2}$ et montrer $\forall u \leq v, R_{u, v} = L_{l(v)-l(u)}(q)$ par récurrence sur la longueur de v en utilisant 3.5.1 et 3.5.2). On obtient donc le résultat très vite dans ce cas $|S| \leq 2$.

Ensuite, on raisonne par récurrence sur y et sur la taille du groupe de Coxeter : formellement, l'ensemble S est fixé et on montre une propriété du couple (M, y) en raisonnant par récurrence sur la quantité $q(M, y) = l(y) + \|M\|$, où l'on pose $\|M\| = \sum_{s, t \in S} m_{st}$ (à priori le raisonnement par récurrence ne montre le résultat que pour les couples (M, y) tels que $q(M, y)$ soit fini ; mais il est facile de voir que le raisonnement de réduction au cas " $\phi(y)$ plein" que nous allons exposer permet également de déduire le cas $q(M, y) = \infty$ du cas $q(M, y)$ fini).

On va montrer que l'on peut se ramener au cas $w = \phi(y)$ plein. En effet, supposons w non plein et considérons la matrice de Coxeter M' définie par m'_{st} = la longueur du plus grand élément de $[e, w] \cap < s, t >$ pour $s, t \in S$ et le système de Coxeter (S, W') associé à la matrice M' . Par la proposition 3.5. de [3], l'application (où les $s_1 \dots s_r$ sont des mots réduits)

$$\begin{aligned} \psi : [e, w] &\rightarrow W' \\ \{s_1 \dots s_r\}_W &\mapsto \{s_1 \dots s_r\}_{W'} \end{aligned}$$

est bien définie, strictement croissante pour les ordres de Bruhat et vérifie

$$\forall x \in [e, w], \forall s \in S, (xs \in [e, w]) \Rightarrow (\psi(\{xs\}_W) = \{\psi(x)s\}_{W'})$$

De ceci on déduit facilement que ψ réalise un isomorphisme de posets gradués de $[e, w]$ sur $[e, \psi(w)]$ et que

$$\forall u, v \in [e, w], R_{u,v}^W = R_{\psi(u), \psi(v)}^{W'}$$

(raisonner par récurrence sur la longueur de v en utilisant les formules 3.5.1. et 3.5.2). Par conséquent, le problème sur $[e, w] \subseteq W$ se transporte complètement sur $[e, \psi(w)] \subseteq W'$ dans lequel effectivement $\psi(w)$ est plein. Comme w est non plein on a $\|M'\| < \|M\|$ donc $q(M', \psi(y)) < q(M, y)$ d'où le résultat par récurrence lorsque w est non plein.

À partir de maintenant, on reste dans un groupe de Coxeter fixé dans lequel $\phi(y)$ est plein ; en particulier $\|M\| < \infty$. La récurrence sur $q(M, y)$ se réduit alors simplement à une récurrence sur la longueur de y .

Cas $l(y) = 0$:

Dans ce cas $y = e$ et toutes les $R_{u,v}$ considérés sont nuls sauf si $x = e$ ou $\phi(e)$; dans chacun de ces cas, on vérifie directement les formules 3.5.1 et 3.5.2.

Cas $l(y) > 0$ avec le résultat vrai pour les y' de longueur $< l(y)$:

Grâce aux égalités bien connues $R_{u,u} = 1$ et $R_{u,v} = q - 1$ si $u \triangleleft v$, on peut supposer $x < y$.

Supposons par exemple qu'il existe g régulier à gauche dans l'ensemble de descente à gauche de y , le cas à droite étant tout-à-fait symétrique.

Soit $v = gy$. Si $m = l(v)$, on a donc $l(y) = m + 1$, $l(\phi(y)) = m + 2$. Si $p = l(\phi(v))$, on a d'une part $p - l(v) \in \{-1, 1\}$ et d'autre part $p - l(g\phi(v)) \in \{-1, 1\}$ donc $p = m + 1$, et finalement $v \triangleleft gv \triangleleft \phi(y)$, $v \triangleleft \phi(v) \triangleleft \phi(y)$.

Supposons d'abord $gx \triangleleft x$. Alors, en posant $w = gx$, le raisonnement qui vient d'être fait (avec x au lieu de y) donne $w \triangleleft gw \triangleleft \phi(x)$, $w \triangleleft \phi(w) \triangleleft \phi(x)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} R_{\phi(x), \phi(y)} &= R_{g\phi(w), g\phi(v)} = R_{\phi(w), \phi(v)} \\ &= R_{w,v} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= R_{gw, gv} = R_{x,y}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{x, \phi(y)} &= R_{gw, g\phi(v)} = R_{w, \phi(v)} \\ &= (q - 1)R_{w,v} + qR_{\phi(w), v} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (q - 1)R_{gw, gv} + qR_{g\phi(w), gv} = (q - 1)R_{x,y} + qR_{\phi(x), y}. \end{aligned}$$

Traisons maintenant le cas $x \triangleleft gx$. Alors, comme on a $\text{coat}(\phi(x)) = \{x\} \cup \{\phi(z) ; z \triangleleft x, z \triangleleft \phi(z)\}$, on voit que $\phi(gx)$ ne peut être un coatome de $\phi(x)$ que si $\phi(gx) = x$, i.e. si $\phi(x) = gx$; sinon on a $\phi(x) \triangleleft \phi(gx)$. On a alors deux sous-cas :

$$x \triangleleft gx, \phi(x) = gx,$$

$$x \triangleleft gx, \phi(x) \triangleleft \phi(gx).$$

Dans le premier sous-cas, on a

$$\begin{aligned} R_{\phi(x),\phi(y)} &= R_{gx,g\phi(v)} = R_{x,\phi(v)} \\ &= (q-1)R_{x,v} + qR_{\phi(x),v} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= (q-1)R_{x,v} + qR_{gx,v} = R_{x,gv} = R_{x,y}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{x,\phi(y)} &= R_{x,g\phi(v)} = (q-1)R_{x,\phi(v)} + qR_{gx,\phi(v)} = (q-1)R_{x,\phi(v)} + qR_{\phi(x),\phi(v)} \\ &= (q-1)((q-1)R_{x,v} + qR_{\phi(x),v}) + qR_{x,v} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= (q-1)((q-1)R_{x,v} + qR_{gx,v}) + qR_{gx,gv} \\ &= (q-1)R_{x,gv} + qR_{gx,gv} = (q-1)R_{x,y} + qR_{\phi(x),y}. \end{aligned}$$

Et pour finir, dans le deuxième sous-cas on a

$$\begin{aligned} R_{\phi(x),\phi(y)} &= R_{\phi(x),\phi(gv)} = R_{\phi(x),g\phi(v)} \\ &= (q-1)R_{\phi(x),\phi(v)} + qR_{g\phi(x),\phi(v)} \\ &= (q-1)R_{x,v} + qR_{gx,v} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= R_{x,gv} = R_{x,y}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R_{x,\phi(y)} &= R_{x,\phi(gv)} = R_{x,g\phi(v)} \\ &= (q-1)R_{x,\phi(v)} + qR_{gx,\phi(v)} \\ &= (q-1)\{(q-1)R_{x,v} + qR_{\phi(x),v}\} + q\{(q-1)R_{gx,v} + qR_{\phi(gx),v}\} \\ &= (q-1)\{(q-1)R_{x,v} + qR_{gx,v}\} + (q-1)\{(q-1)R_{\phi(x),v} + qR_{g\phi(x),v}\} \\ &= (q-1)R_{x,gv} + qR_{\phi(x),v} \\ &= (q-1)R_{x,y} + qR_{\phi(x),y}. \end{aligned} \quad \text{Q. E. D.}$$

Notre but va consister maintenant à montrer que tous les couplages sont réductibles.

Définition 3.6 Soit (W, S) un système de Coxeter et $c = (Q, \phi)$ un couplage sur W . On dit que c est **plein** si Q contient un élément plein.

Remarquons qu'un couplage non plein est trivialement réductible. Ceci éliminera un bon nombre de cas dans ce qui va suivre.

4 Critères de régularité

Ces critères de régularité permettent non seulement de montrer qu'un couplage est défini en certains points, mais en plus donnent une formule explicite pour la valeur du couplage en ces points. Dans ce qui suit, " $\phi(x) = y$ " sous-entend " ϕ définie en x et $\phi(x) = y$."

Proposition 4.1 *Soit (W, S) un système de Coxeter, $c = (Q, \phi)$ un couplage maximal sur W , $a = \phi(e)$. Soit $w \in Q$ et $s \in S$. (on rappelle que pour $s \neq a$ on pose $P_s = \langle s, a \rangle$ et $P = \bigcup_{s \neq a} P_s$)*

*Si $s \neq a$, et $\forall v \leq w$, $(v \in P_s) \Rightarrow (\phi(sv) = s\phi(v))$, alors $\phi(sw) = s\phi(w)$.
Si $s = a$, et $\forall v \leq w$, $(v \in P) \Rightarrow (\phi(sv) = s\phi(v))$, alors $\phi(sw) = s\phi(w)$.*

Bien entendu, on a une variante en faisant agir s à droite.

Preuve : Nous nous contenterons de démontrer la première assertion, la deuxième étant tout-à-fait similaire.

Supposons $u = \phi(w) \triangleleft w$. Alors par hypothèse de récurrence on a $\phi(su) = s\phi(u) = sw$, donc l'assertion est vraie dans ce cas.

On raisonne par récurrence sur la longueur de w . Comme il arrive souvent, le cas $l(w) = 0$ est trivial, de même d'ailleurs que le cas $w \in P_s$. On prend donc $w \notin P_s$. Considérons la formule :

$$F(w) : \phi(sw) = s\phi(w).$$

Comme ϕ et $x \mapsto sx$ sont des involutions, on a $F(w) \Leftrightarrow F(sw)$ et $F(w) \Leftrightarrow F(\phi(w))$. Par conséquent, on peut supposer $w \triangleleft sw, w \triangleleft \phi(w)$. Supposons $y = \phi(sw) \triangleleft sw$. Si $l(sy) > l(y)$, comme $(y \triangleleft sw, w \triangleleft sw)$ cela implique $y = w$, donc $\phi(w) = sw$ et l'assertion est claire. Sinon on a $y = sz$ avec $l(y) = l(z) + 1, z \triangleleft w$. Par hypothèse de récurrence on a $F(z)$, donc $F(sz) = F(y)$, donc $F(\phi(y)) = F(sw)$, donc $F(w)$. Supposons $v = s\phi(w) \triangleleft \phi(w)$. Alors on a $v = w$ (auquel cas on retrouve le cas $\phi(w) = sw$) ou bien il existe $x \triangleleft w$ avec $v = \phi(x), x \triangleleft \phi(x)$. Alors par hypothèse de récurrence on a $F(x)$, donc $F(\phi(x)) = F(v)$, donc $F(w)$.

On peut donc supposer $w \notin P_s, w \triangleleft sw, w \triangleleft \phi(w), sw \triangleleft \phi(sw)$ (ou ϕ non défini en sw), $\phi(w) \triangleleft s\phi(w)$.

Si $s\phi(w)$ est diédral, il existe un sous-groupe diédral D tel que $s\phi(w) \in D$. Alors $w \in D$ et $\phi(w) \in D$. La proposition 2.4 montre alors que D est principal: il existe $t \in S \setminus \{a\}$ tel que $D = P_t$. Alors $s \in P_t$ donc $s = t$ et enfin $w \in P_s$ qui est exclu.

Donc $s\phi(w)$ est non diédral.

Par la proposition 2.3, tout x vérifiant $coat(x) = coat(s\phi(w))$ est en fait confondu avec $s\phi(w)$. Ceci va nous permettre de montrer une égalité d'éléments

via une égalité d'ensembles de coatomes.

On est en droit d'écrire (en utilisant l'hypothèse de récurrence à la quatrième ligne, et sous réserve d'existence pour le premier ensemble de coatomes)

$$\begin{aligned}
coat(\phi(sw)) &= \{sw\} \cup \{\phi(z) ; z \triangleleft sw, z \triangleleft \phi(z)\} \\
&= \{sw\} \cup \{\phi(z) ; (z = w \text{ ou } z = su, u \triangleleft w, u \triangleleft su), z \triangleleft \phi(z)\} \\
&= \{sw; \phi(w)\} \cup \{\phi(su) ; u \triangleleft w, u \triangleleft su, su \triangleleft \phi(su)\} \\
&= \{sw; \phi(w)\} \cup \{s\phi(u) ; u \triangleleft w, u \triangleleft su, su \triangleleft s\phi(u)\} \\
\text{et } coat(s\phi(w)) &= \{\phi(w)\} \cup \{sz ; z \triangleleft \phi(w), z \triangleleft sz\} \\
&= \{\phi(w)\} \cup \{sz ; (z = w \text{ ou } z = \phi(u), u \triangleleft w, u \triangleleft \phi(u)), z \triangleleft sz\} \\
&= \{sw; \phi(w)\} \cup \{s\phi(u) ; u \triangleleft w, u \triangleleft \phi(u), \phi(u) \triangleleft s\phi(u)\}
\end{aligned}$$

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$A = \{u ; u \triangleleft w, u \triangleleft su, su \triangleleft s\phi(u)\} \text{ et }$$

$$B = \{u ; u \triangleleft w, u \triangleleft \phi(u), \phi(u) \triangleleft s\phi(u)\}$$

sont confondus. Par symétrie des rôles de ϕ et $x \mapsto sx$, il suffit de montrer $A \subseteq B$.

Soit donc $u \in A$. Posons $m = l(u)$ et $x = \phi(u)$. On a donc $l(su) = m + 1, l(s\phi(u)) = m + 2$. Comme on a à la fois $l(x) - l(u) \in \{-1; +1\}$ et $l(s\phi(u)) - l(x) \in \{-1; +1\}$, ceci impose $l(x) = m + 1$ donc $u \in B$. Q. E. D.

Si l'on se souvient de la proposition 2.6, la proposition 4.1 plus haut montre que

Corollaire 4.2 *Soit (W, S) un système de Coxeter, $c = (Q, \phi)$ un couplage maximal sur W , $a = \phi(e)$. Soit $w \in Q$ et $s \in S$.*

Si $s \neq a$, (ϕ est s -régulier à gauche) $\Leftrightarrow (\phi|_{P_s}$ est s -régulier à gauche)

Si $s = a$, (ϕ est s -régulier à gauche) $\Leftrightarrow (\phi|_P$ est s -régulier à gauche).

Avec bien évidemment une variante à droite.

Théorème 4.3 *Soit (W, S) un système de Coxeter, avec W muni d'une structure de poset gradué par l'ordre de Bruhat et la fonction longueur usuelle. Soit $c = (Q, \phi)$ un couplage maximal sur W , $a = \phi(e)$, λ l'application $W \rightarrow W, x \mapsto xa$, X et Y deux parties de S telles que :*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in X \setminus \{a\}, \phi|_{P_x} = \lambda|_{P_x} \\
&\forall y \in Y \setminus \{a\}, \phi|_{P_y} \text{ est } a\text{-régulier à gauche.}
\end{aligned}$$

Alors $\langle X \rangle (\langle Y \rangle \cap Q) \subseteq Q$ et

$$\forall x \in \langle X \rangle, \forall y \in \langle Y \rangle \cap Q, \phi(xy) = x\phi(y).$$

Bien entendu, on a un résultat analogue en échangeant gauche et droite.

Preuve du théorème : On raisonne par récurrence sur la longueur de x pour montrer que

$$\forall x \in \langle X \rangle, H(x) : \forall y \in \langle Y \rangle \cap Q, \phi(xy) = x\phi(y).$$

Clairement $H(e)$ est vraie. Supposons $H(x')$ vraie pour les x' de longueur $< l(x)$. Prenons $x_1 \in X$ tel que l'on puisse écrire $x = x_1\xi$ avec $\xi \triangleleft x$. Notons $w = \xi y$. Alors par hypothèse de récurrence $\phi(w) = \xi\phi(y)$. On cherche à montrer $\phi(xy) = x\phi(y)$, c'est-à-dire $\phi(x_1w) = x_1\phi(w)$. Pour cela, grâce au théorème 4.1, il suffit de montrer :

$$\forall v \in [e, w] \cap P_{x_1}, \phi(x_1v) = x_1\phi(v). \quad (*)$$

(où l'on pose par commodité $P_a = P$). Prenons donc un v vérifiant $v \in [e, w] \cap P_{x_1}$.

Supposons $x_1 \neq a$. Alors par hypothèse ϕ est confondue avec λ sur P_{x_1} , donc $\phi(v) = va, \phi(x_1v) = x_1va$ et $(*)$ est clair.

Supposons $x_1 = a$. Alors il existe $t \in (X \cup Y) \setminus \{a\}$ tel que $v \in P_t$. Par hypothèse ϕ est a -régulière à gauche sur P_t donc $(*)$ est vraie. Q. E. D.

Donnons pour finir un critère pratique de régularité :

Remarque 4.4 Soit ϕ un couplage défini sur un groupe de Coxeter diédral $\langle x, y \rangle$. Pour $j \leq m_{xy}$ notons

$$Y_j = [y, x, j]$$

Alors on a équivalence entre

- (1) ϕ n'est pas x -régulier à gauche
- (2) $\exists j \leq m_{xy} - 3, \phi(Y_j) = Y_{j+1}, \phi(xY_j) \neq xY_{j+1}$ (donc $\phi(xY_j) = Y_{j+2}$).

Preuve : Notons $Z = \{z \in \langle x, y \rangle ; \phi(xz) \neq x\phi(z)\}$. Comme ϕ et $t \mapsto xt$ sont des involutions, Z est stable par ces deux applications. Par conséquent, tout élément minimal z_0 de Z , s'il existe, vérifie $z_0 \triangleleft xz_0$ et $z_0 \triangleleft \phi(z_0)$ (ce qui implique (2) avec $z_0 = Y_j$), d'où le résultat. Q. E. D.

5 Réduction du domaine dans le cas croisé

Étant donné un couplage maximal (Q, ϕ) sur un groupe de Coxeter W , il est facile de voir que pour chaque $s \in S$ on a $\phi(s) \in \{as; sa\}$ (où $a = \phi(e)$). Lorsque la restriction de ϕ aux générateurs n'est ni une multiplication à gauche ni une multiplication à droite, où de manière équivalente si il existe $u, v \in S$

avec $m_{au} > 2$, $m_{av} > 2$, $\phi(u) = ua$, $\phi(v) = av$, on dit que ϕ est croisé. En fait, nous allons montrer ici un résultat vrai en toute généralité (le théorème 5.1) mais qui ne nous sera utile que dans le cas **croisé** (proposition 7.1).

Soit (W, S) un système de Coxeter quelconque, et (Q, ϕ) un couplage maximal associé à W , $a = \phi(e)$. Soit G et D les parties de S définies par

$$\begin{aligned} G &= \{g \in S ; \phi(g) = ga\} \\ D &= \{d \in S ; \phi(d) = ad\} \end{aligned}$$

et $\langle G \rangle$ et $\langle D \rangle$ les sous-groupes paraboliques associés. Nous allons démontrer l'inclusion suivante :

Théorème 5.1 $Q \subseteq \langle G \rangle \langle D \rangle$.

Preuve du théorème. Supposons par l'absurde qu'il existe w dans $Q \setminus \langle G \rangle \langle D \rangle$. On peut prendre w minimal ; alors $\forall v < w, v \in \langle G \rangle \langle D \rangle$. Remarquons d'abord que l'ensemble de descente à gauche $D_g(w)$ de w ne contient que des éléments qui ne sont pas dans G (sinon on peut écrire $w = gv$ avec $g \in G$, $v < w$ et alors v est dans $\langle G \rangle \langle D \rangle$ donc w aussi: impossible), et comme $S = G \cup D$, ces éléments sont dans $D \setminus G$. De même, les éléments de l'ensemble de descente à droite de w sont tous dans $G \setminus D : D_d(w) \subseteq G \setminus D$.

Soit $w_1 \dots w_m$ une écriture réduite de w . On a donc $w_1 \in D \setminus G$, $w_m \in G \setminus D$. Par la remarque précédente, l'élément x de W représenté par $w_1 \dots w_{m-1}$ vérifie $D_g(x) \cap G = \emptyset$. Comme $x \in \langle G \rangle \langle D \rangle$, ceci impose $x \in \langle D \rangle$. Ainsi (en utilisant la notion de support dans un groupe de Coxeter), on a $\forall i \leq m-1, w_i \in D$. De même, $\forall i \geq 2, w_i \in G$. Ainsi, en renommant les w_i ,

$$w = db_1 \dots b_r g, \text{ avec}$$

$$\left(\begin{array}{l} d \in D \setminus G, \\ \forall i \ b_i \in D \cap G, \\ g \in G \setminus D \end{array} \right) (*)$$

De plus, comme d'une part $D_g(w) \subseteq \{d; b_1; \dots; b_r; g\}$ et d'autre part $D_g(w) \subseteq D \setminus G$, on voit que $D_g(w) = \{d\}$, et de même $D_d(w) = \{g\}$. Ainsi, toute écriture réduite de w comporte les caractères g et d une et une seule fois.

Nous utilisons le résultat (facile) suivant (cf [3], corollaire de la proposition 2.6):

Remarque 5.2 Si $q \in Q$ et a n'est pas dans le support de q , alors $q \triangleleft \phi(q)$ et si μ est un mot réduit représentant $\phi(q)$ dans W , on obtient une écriture réduite de q en effaçant le caractère a de μ .

Dans ce qui suit, on utilise assez souvent l'ensemble \mathcal{I} des éléments de W qui ont une unique écriture réduite; notamment, comme $d \in D \setminus G$, $g \in G \setminus D$, les éléments ag , da , gad et dag sont dans \mathcal{I} . En fait, la seule propriété de \mathcal{I} qui nous intéresse est la suivante :

Si $f \in \mathcal{I}$ et m_f est l'unique mot réduit représentant f ,
alors pour tout $h \in W$ tel que $f \triangleleft h$ et tout mot réduit m_h
représentant h , le mot m_f est une sous-expression de m_h .

Remarquons maintenant que

- (1) Si $dg \neq gd$, $dg \notin Q$
- (2) Dans tous les cas, $dag \notin Q$.

Pour montrer (1) et (2), on raisonne dans les deux cas par l'absurde : si $dg \in Q$, la remarque 4.2. ci-dessus montre que $dg \triangleleft \phi(dg)$, donc $\text{coat}(\phi(dg)) = \{dg; ad; ga\}$, or aucun élément de W n'a cet ensemble de coatomes (si $\text{coat}(w) = \{dg; ad; ga\}$, comme $dg \in \mathcal{I}$ et $dg \triangleleft w$ on a $w = xdg, dxg$ ou dgx , avec x un caractère de S . Comme $a \geq w$, $x = a$, mais alors ad et ga ne peuvent pas être des coatomes de w les deux à la fois), d'où (1). Montrons maintenant (2), et supposons donc $dag \in Q$. Par le (1) et le fait que Q est filtrant à gauche, on a $dg = gd$. On a alors $\phi(da) \in \{ada, dad\}$, $\phi(ag) \in \{aga, gag\}$, $\phi(dg) = gad$, donc $\forall x \in \text{coat}(dag), \phi(x) \neq dag$. Ainsi $dag \triangleleft \phi(dag)$; notons $w = \phi(dag)$. Alors, comme $dg \leq dag$ et $\phi(dg) = gad$, on a $gad \triangleleft \phi(dag)$; comme gad est dans \mathcal{I} , si m est un mot réduit représentant w , on a un caractère x tel que

$$m \in \{xgad, gxad, gaxd, gadx\}$$

Comme $ag \triangleleft w$, et $ag \in \mathcal{I}$, la seule possibilité pour m à la première ligne est $m = xgad, x = a$. De même $da \triangleleft w$ donne $m = gadx, x = a$. Alors les mots $agad$ et $gada$ sont confondus, ce qui est absurde, d'où (2).

Reprenant notre raisonnement de départ, ces faits (1) et (2) donnent $dg = gd$, et $\forall i, b_i \neq a$ (sinon $dag \leq w$, ce qui est impossible car Q est filtrant à gauche). Par conséquent $a \not\leq w$, donc par la remarque 5.2 ci-dessus $w \triangleleft \phi(w)$, et si μ est une écriture réduite de $\phi(w)$, μ^\sharp le mot obtenu en supprimant l'unique occurrence de a dans μ , on a $w = \mu^\sharp$ dans W . Donc μ contient les caractères a, d et g une et une seule fois. Comme $d \leq w$ et $w \triangleleft \phi(w)$, on a $ad = \phi(d) \leq \phi(w)$ et de même $ga \leq \phi(w)$, donc le seul ordre d'apparition possible dans μ est g, a, d . On voit alors que l'ordre d'apparition dans μ^\sharp est g, d ce qui est absurde. Q. E. D.

6 Étude partielle du cas des groupes de rang 3.

Avant d'entrer dans le vif du sujet nous indiquons quelques outils qui seront utilisés implicitement sans plus d'explications par la suite. Les faits suivants sont bien connus, pour w élément d'un groupe de Coxeter :

- (1) Étant donné deux écritures réduites de w , on peut passer de l'une à l'autre en utilisant uniquement des relations de tresses.

(2) Étant donné une écriture quelconque de w , on peut aboutir à une écriture réduite en utilisant uniquement les relations de tresses et les relations $s^2 = e$ pour $s \in S$.

Le (1) servira implicitement à justifier chaque assertion du type “tel élément w a une unique écriture réduite”; plus précisément, en utilisant la notation \mathcal{I} définie au §4, on a pour tout mot réduit m représentant un élément $w \in W$, $w \in \mathcal{I}$ ssi aucune relation de tresse n’est utilisable sur m i.e. ssi m ne contient pas de sous-mot diédral correspondant à un élément diédral maximal. Tandis que (2) sera implicitement utilisé chaque fois qu’on aura besoin de savoir qu’un mot est réduit. Remarquons que les mots rencontrés ne seront jamais bien complexes (ils ne différeront d’un mot diédral que par au plus un caractère), ce qui justifie que nous ne nous y attardions pas.

Dans toute cette section 6, on considère un système de Coxeter (W, S) de rang 3 : $S = \{a; b; b'\}$ et (Q, ϕ) un couplage maximal sur W avec $\phi(e) = a$.

6.1 Généralités en rang 3.

Proposition 6.1.1 *Soit $G = \langle a, b' \rangle \langle a, b \rangle$. Alors:*

Si $(m_{bb'} > 2$ ou $m_{ab} = \infty$ ou $m_{ab'} = \infty)$, alors G ne contient pas d’élément plein.

Si $(m_{bb'} = 2, m_{ab} < \infty, m_{ab'} < \infty)$, alors G a exactement deux éléments pleins, à savoir

$$\begin{aligned} \Gamma_{b',a,b} &= \langle m_{ab'} - 1, a, b' \rangle [b, a, m_{ab} - 1] \\ \text{et} \\ \Gamma'_{b',a,b} &= \langle m_{ab'} - 1, a, b' \rangle a [b, a, m_{ab} - 1]. \end{aligned}$$

Preuve : Rappelons que par définition de la plénitude, l’existence d’un élément plein implique que tous les coefficients de la matrice de Coxeter sont finis. Tout élément g de G s’écrit xy avec $x \in \langle a, b' \rangle$, $y \in \langle a, b \rangle$. En posant $\xi = \min(x, xa)$ et $\eta = \min(y, ay)$ on voit que g s’écrit $\xi \varepsilon \eta$ avec $\varepsilon \in \{e; a\}$. Comme $\xi \triangleleft \xi a$, on a $j \leq m_{ab'} - 1$ tel que $\xi = \langle j, a, b' \rangle$. De même, on a $k \leq m_{ab} - 1$ tel que $\eta = [a, b, k]$. Si g est plein, $g \geq M_{ab'}$ donc $j = m_{ab'} - 1$ et de même $k = m_{ab} - 1$. D’où la proposition. Q. E. D.

Proposition 6.1.2 *Supposons que $m_{ab'} \geq 3$ et que la restriction de ϕ à $[e, ab'a]$ est confondue avec celle de $x \mapsto xa$ et que β n’est pas a -régulier à gauche. Par la remarque 4.4 il existe t minimal avec $\phi([b, a, t]) = [b, a, t + 1]$, $\phi([a, b, t + 1]) = [b, a, t + 2]$, $t \leq m_{ab} - 3$. Alors $ab'[b, a, t]$ est un élément minimal de $W \setminus Q$.*

Preuve : Posons $w = ab'[b, a, t]$. La proposition 4.1 donne:

$$\forall x < [b, a, t], \phi(b'x) = b'\phi(x), \phi(ab'x) = ab'\phi(x).$$

Notons $C = \text{coat}([b, a, t])$ Remarquons que si $t \geq 2$, $|C| = 2$ et ϕ abaisse un des éléments de C tout en rehaussant l'autre à $[a, b, t]$; alors que si $t = 1$ on a $C = \{e\}$, $\phi(e) = a$. Dans tous les cas, il y a un unique élément rehaussé par ϕ dans C et cet élément est envoyé sur $[a, b, t]$.

On a alors les calculs suivants:

$$\begin{aligned} \text{coat}(w) &= \{b'[b, a, t]; [a, b, t+1]\} \cup ab'C \\ \phi(\text{coat}(w)) &= \{b'[b, a, t+1]; [b, a, t+2]\} \cup ab'\phi(C) \\ Z(\phi, w) &= \{w; b'[b, a, t+1]; [b, a, t+2]; ab'[a, b, t]\} \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que $w \in Q$. Alors comme $w \notin \text{coat}(\phi(w))$ (cf. deuxième ligne ci-dessus) on a nécessairement $w \triangleleft \phi(w)$ donc $\text{coat}(\phi(w)) = Z(\phi, w)$. Soit m un mot réduit représentant $\phi(w)$. Comme $[b, a, t+2] \in \mathcal{I}$ et $b' \leq \phi(w)$, on obtient m en insérant le caractère b' quelque part dans le mot $[b, a, t+2]$. Maintenant, le fait $b'[b, a, t+1] \triangleleft \phi(w)$ impose au b' d'être avant le premier a apparaissant dans $[b, a, t+1]$, tandis que $w \triangleleft \phi(w)$ empêche ce même b' d'être de ce côté, ce qui est une contradiction manifeste. Q. E. D.

Proposition 6.1.3 *Supposons que $m_{bb'} \geq 3$ et que la restriction de ϕ à $[e, b'a]$ est confondue avec celle de $x \mapsto xa$ et que β n'est pas b -régulier à gauche. Par la remarque 4.4 il existe t minimal tel que $\phi([a, b, t]) = [a, b, t+1]$, $\phi([b, a, t+1]) = [a, b, t+2]$, $t \leq m_{ab} - 3$. Alors $bb'[a, b, t]$ est un élément minimal de $W \setminus Q$.*

Preuve : Posons $w = bb'[a, b, t]$. La proposition 4.1. donne:

$$\forall x < [a, b, t], \quad \phi(b'x) = b'\phi(x), \quad \phi(bb'x) = bb'\phi(x).$$

Notons $C = \text{coat}([a, b, t]) = \{[a, b, t-1]; [b, a, t-1]\}$ (car $t \geq 2$). Remarquons que ϕ abaisse un des éléments de C et rehausse l'autre à $[b, a, t]$. On a alors les calculs suivants:

$$\begin{aligned} \text{coat}(w) &= \{b'[a, b, t]; [b, a, t+1]\} \cup bb'C \\ \phi(\text{coat}(w)) &= \{b'[a, b, t+1]; [a, b, t+2]\} \cup bb'\phi(C) \\ Z(\phi, w) &= \{w; b'[a, b, t+1]; [a, b, t+2]; bb'[b, a, t]\} \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que $w \in Q$. Alors comme $w \notin \phi(\text{coat}(w))$ (cf. deuxième ligne ci-dessus) on a nécessairement $w \triangleleft \phi(w)$ donc $\text{coat}(\phi(w)) = Z(\phi, w)$. Soit m un mot réduit représentant $\phi(w)$. Comme $[a, b, t+2] \in \mathcal{I}$ et $b' \leq \phi(w)$, on obtient m en insérant le caractère b' quelque part dans le mot $[a, b, t+2]$. Maintenant, le fait $w \triangleleft \phi(w)$ impose $\phi(w) = abb'[a, b, t] = abab'[b, a, t-1]$. C'est incompatible avec $b'[a, b, t+1] \triangleleft \phi(w)$. Q. E. D.

6.2 Étude du cas croisé en rang 3.

Dans cette section, on prend $S = \{a; b; b'\}$, $m_{ab} \geq 3$, $m_{ab'} \geq 3$, et $\phi(e) = a$, $\phi(b) = ab$, $\phi(b') = b'a$ (cas "croisé"). On note β (β') la restriction de ϕ à $a, b >$ (respectivement $< a, b' >$).

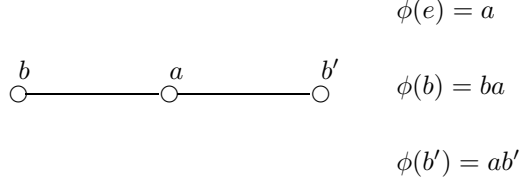


Figure 1 : Cas croisé

Par le théorème 5. on a $Q \subseteq \langle a, b' \rangle \langle a, b \rangle$. Alors par la proposition 6.1.1, Q ne pourra être plein que si $m_{bb'} = 2, m_{ab} < \infty, m_{ab'} < \infty$ ce que l'on suppose dans toute la suite de cette section 6.2. De plus, chaque fois que l'on trouve une nouvelle obstruction $x \notin Q$ avec $x \leq \Gamma_{b',a,b}$ alors on peut en conclure que ϕ n'est pas plein. C'est ce que l'on fait dans les trois premières propositions qui suivent.

Proposition 6.2.1 *Supposons $\phi(ab') = ab'a$ (c'est le cas par exemple si $m_{ab'} = 3$), et que β n'est pas a -régulier à gauche. Par la remarque 4.4 il existe t minimal avec $\phi([b, a, t]) = [b, a, t+1]$, $\phi([a, b, t+1]) = [b, a, t+2]$, $t \leq m_{ab} - 3$. Alors $ab'[b, a, t]$ est un élément minimal de $W \setminus Q$, donc ϕ n'est pas plein.*

Preuve : C'est la proposition 6.1.2.

Q. E. D.

Proposition 6.2.2 *Supposons $m_{ab'} \geq 4, \phi(ab') = b'ab', \phi(ab'a) = b'ab'a$ (c'est le cas par exemple si $m_{ab'} = 4$) et que β n'est pas confondu avec l'application $x \mapsto ax$. Alors il existe t minimal avec $\phi([b, a, t]) = [b, a, t+1]$, $t \leq m_{ab} - 2$. Dans ces conditions, $ab'[b, a, t]$ est un élément minimal de $W \setminus Q$, donc ϕ n'est pas plein.*

Preuve : Posons $w = ab'[b, a, t]$. On a, par des calculs analogues à ceux de la proposition 6.1.2 :

$$\begin{aligned}
 \text{coat}(w) &= \{b'[b, a, t]; [a, b, t+1]; ab'[a, b, t-1]; ab'[b, a, t-1]\} \\
 \phi(\text{coat}(w)) &= \{b'[b, a, t+1]; \phi([a, b, t+1]); b'ab'[a, b, t-1]; b'ab'[b, a, t-1]\} \\
 Z(\phi, w) &= \{w; b'[b, a, t+1]; \phi([a, b, t+1]); b'ab'[a, b, a, t-1]; b'ab'[b, a, t-1]\}
 \end{aligned}$$

On conclut ensuite en disant que si $w \in Q$, comme $\phi([a, b, t+1])$ est dans \mathcal{I} , que si m est un mot réduit représentant $\phi(w)$, alors m se déduit de $\phi([a, b, t+1])$ en insérant un b' quelque part. Mais alors on contredit $b'ab'[b, a, t-1] \leq \phi(w)$ car $m_{a,b'} \geq 4$.

Q. E. D.

Proposition 6.2.3 *Supposons $m_{a,b'} \geq 5, \phi(ab') = b'ab', \phi(ab'a) = ab'ab'$. Alors $ab'ba$ est un élément minimal de $W \setminus Q$, donc ϕ n'est pas plein.*

Preuve : Posons $w = ab'ba$. On a :

$$\begin{aligned} coat(w) &= \{b'ba; aba; ab'a; ab'b\} \\ \phi(b'ba) &= b'\phi(ba) \\ \phi(ab'a) &= ab'ab' \text{ (hypothèse)} \\ \phi(ab'b) &= \phi(ab')b = b'ab'b \\ \phi(coat(w)) &= \{b'\phi(ba); \phi(aba); ab'ab'; b'ab'b\} \end{aligned}$$

Si m est un mot réduit représentant $\phi(w)$, comme $ab'ab' \triangleleft \phi(w)$ on voit que m s'obtient en insérant le caractère b dans un mot $\mu \in \{b'ab'a; ab'ab'\}$. Comme $b'ab'b \in \mathcal{I}$ on a $\phi(w) \in \{b'ab'ba; b'ab'ab; ab'ab'b\}$. Comme $w = ab'ba \in \mathcal{I}$ on a même $\phi(w) = b'ab'ba$.

Mais alors on contredit $ab'ab' \leq \phi(w)$ car $m_{a,b'} \geq 5$.

Q. E. D.

Proposition 6.2.4 *Si ϕ est plein, alors β est a -régulier à gauche et β' est a -régulier à droite.*

Preuve : Lorsque l'on met bout à bout les propositions 6.II.1, 6.II.2, et 6.II.3, on s'aperçoit qu'on a montré en particulier que si ϕ est plein, alors β est a -régulier à gauche. Par symétrie, β' doit aussi être a -régulier à droite. Q. E. D.

Proposition 6.2.5 *Supposons que β est a -régulier à gauche et que β' est a -régulier à droite; que β n'est pas confondu avec $x \mapsto ax$ et que β' n'est pas confondu avec $x \mapsto xa$. Il existe donc t et t' minimaux tels que $\phi(\langle t', a, b' \rangle) = \langle t' + 1, a, b' \rangle$ et $\phi([b, a, t]) = [b, a, t + 1]$. Dans ces conditions, $\langle t', a, b' \rangle [b, a, t]$ est un élément minimal de $W \setminus Q$, donc ϕ n'est pas plein.*

Preuve : Posons $w = \langle t', a, b' \rangle [b, a, t]$ (remarquons que $t, t' \geq 2$). On a (en itérant la proposition 4.1 pour les quatre dernières lignes)

$$\begin{aligned} coat(w) &= \{ \langle t' - 1, a, b' \rangle [b, a, t]; \quad \langle t' - 1, b', a \rangle [b, a, t]; \\ &\quad \langle t', a, b' \rangle [b, a, t - 1]; \quad \langle t', a, b' \rangle [a, b, t - 1] \} \\ \phi(\langle t' - 1, a, b' \rangle [b, a, t]) &= \langle t' - 1, a, b' \rangle \phi([b, a, t]) = \langle t' - 1, a, b' \rangle [b, a, t + 1], \\ \phi(\langle t' - 1, b', a \rangle [b, a, t]) &= \langle t' - 1, b', a \rangle \phi([b, a, t]) = \langle t' - 1, b', a \rangle [b, a, t + 1], \\ \phi(\langle t, a, b' \rangle [b, a, t - 1]) &= \phi(\langle t, a, b' \rangle) [b, a, t - 1] = \langle t' + 1, a, b' \rangle [b, a, t - 1], \\ \phi(\langle t, a, b' \rangle [a, b, t - 1]) &= \phi(\langle t, a, b' \rangle) [a, b, t - 1] = \langle t' + 1, a, b' \rangle [a, b, t - 1]. \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que $w \in Q$. Alors, vu l'énumération qu'on vient de faire w n'est pas dans $\phi(w)$ donc $w \triangleleft \phi(w)$. Comme $w \in \mathcal{I}$, si m est un mot réduit représentant $\phi(w)$, alors m s'obtient en insérant un certain caractère c dans $\langle t', a, b' \rangle [b, a, t]$. Remarquons que $t' \leq m_{ab'} - 2$ car $\phi(\langle t, a, b' \rangle) \neq \langle t, a, b' \rangle a$ et de même $t \leq m_{ab} - 2$. Alors, comme $\langle t' + 1, a, b' \rangle \in \mathcal{I}$ et $[b, a, t + 1] \in \mathcal{I}$, on voit que le caractère c devrait être à la fois au début et à la fin de $\langle t', a, b' \rangle [b, a, t]$, ce qui est absurde. Q. E. D.

Proposition 6.2.6 *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- (1) ϕ est plein.
- (2) $\begin{cases} \beta \text{ est régulier à gauche, et } \forall x \in \langle a, b' \rangle & \beta'(x) = xa \\ OU \\ \beta' \text{ est régulier à droite, et } \forall y \in \langle a, b \rangle & \beta(y) = ay \end{cases}$

Preuve : En combinant les propositions 6.2.4 et 6.2.5 on voit que (1) implique (2). Réciproquement, par exemple dans la deuxième alternative de (2) on a par le théorème 4.3

$$\forall x \in \langle a, b' \rangle, \forall y \in \langle a, b \rangle, \phi(xy) = \phi(x)y$$

En particulier, on voit que Q contient l'élément $\Gamma_{b',a,b}$ (cf. proposition 6.1.1) qui est plein. Q. E. D.

6.3 Étude du cas non dégénéré en rang 3.

Dans cette section, on suppose $S = \{a; b; b'\}, m_{ab} \geq 3, m_{ab'} \geq 3$ (cas “non dégénéré”). Le cas croisé venant d'être traité à la section précédente, on suppose ici $\phi(b) = ba, \phi(b') = b'a$. Comme précédemment, le cas $m_{bb'} > 2$ est plus simple.

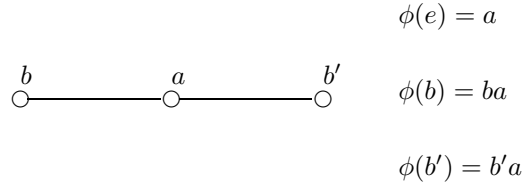


Figure 2 : Cas non dégénéré non croisé

Proposition 6.3.1 *Supposons que β n'est pas confondu avec $x \mapsto xa$. Alors il existe t minimal tel que $\phi(\langle t, a, b \rangle) = \langle t+1, a, b \rangle$ (avec $m_{ab} \geq t+2$). Soit $H = \{w \in W ; l(w) = t+1, b' \leq w, \langle t, a, b \rangle \leq w, w \neq b'\langle t, a, b \rangle\}$, et Γ, Γ' les éléments définis à la proposition 6.1.1. Alors*

- (1) *Si $\phi(ab') = ab'a$, alors $\forall w \in H, w \notin Q$.*
- (2) *Si $\phi(ab') \neq ab'a$, alors $abb' \notin Q, ab'b \notin Q$.*
- (3) *L'ensemble Q ne contient pas d'élément plein, sauf dans le cas $\phi(ab') = ab'a, m_{bb'} = 2, t$ impair. Dans ce cas, les seuls (éventuels) éléments pleins dans Q sont Γ et Γ' .*

Preuve : Montrons d'abord (1).

Définissons un ensemble d'entiers T de la façon suivante :

$$T = \begin{cases} [0, t-1] & \text{si } m_{bb'} > 2 \\ \{j \in [0, t-2] ; j \text{ pair}\} & \text{si } m_{bb'} = 2 \end{cases}$$

On a alors la description suivante de H : tout $w \in H$ s'écrit $w = Cb'\langle j, a, b \rangle$, (où C est l'unique mot tel que l'on ait l'égalité de mots $\langle t, a, b \rangle = C'\langle j, a, b \rangle$ avec $j \in T$). Soit $v \in \text{coat}(w)$. Si $v = \langle t, a, b \rangle$, on a $\phi(v) = \langle t+1, a, b \rangle \neq w$ et sinon $\phi(v) = va$ (par la proposition 2.5, en utilisant le couplage $x \mapsto xa$). Pour ces derniers v , on a $va \neq w$ (sinon wa serait un coatome de w , ce qui contredit le fait que $w \in \mathcal{I}$ et que son dernier caractère n'est pas un a) donc $\phi(v) \neq w$. Ainsi $w \notin \phi(\text{coat}(w))$, donc si $w \in Q$ on doit avoir $w \triangleleft \phi(w)$. Soit D le mot obtenu en effaçant de C son dernier caractère. Les éléments $x_1 = Db'\langle j, a, b \rangle$ et $x_2 = \langle t, a, b \rangle$ sont des coatomes de w , et comme $x_1 \triangleleft \phi(x_1) (= x_1a)$, $x_2 \triangleleft \phi(x_2)$, si $w \in Q$, $y = \phi(w)$ vérifie :

$$Db'\langle j+1, b, a \rangle \triangleleft y ; \langle t+1, a, b \rangle \triangleleft y.$$

Remarquons que l'élément représenté par $m_2 = \langle t+1, a, b \rangle$ est dans \mathcal{I} , donc si m est un mot réduit représentant y , alors on obtient m en rajoutant le caractère b' quelque part dans le mot m_2 : $m = Ub'V$ et $m_2 = UV$. L'élément $\phi(x_1)$ peut avoir plusieurs écritures réduites (quand $m_{ab'} = 3$) mais parmi celles-ci $m_1 = Db'\langle j+1, b, a \rangle$ est la seule contenant au plus un caractère b' . Dans tous les cas, m_1 doit donc être une sous-expression de m . On doit donc avoir $U \geq u = D$ et $V \geq v = \langle j+1, b, a \rangle$. De plus $V \neq v$ (les derniers caractères différents) et du fait des contraintes de longueur $U = u$ et $V = vb$. Alors le dernier caractère de U coïncide avec le premier caractère de V , donc $m_2 = UV$ n'est pas réduit, ce qui est absurde. Ceci achève de montrer (1).

Montrons (2). Remarquons que les hypothèses impliquent que $\phi(ab') = b'ab'$, $m_{ab'} \geq 4$. Soit $w_1 = abb'$; on a (en utilisant la proposition 2.5. avec le couplage $x \mapsto xa$ pour la dernière égalité)

$$\begin{aligned} \text{coat}(abb') &= \{ab; ab'; bb'\} \\ \phi(ab) &\in \{aba; bab\}, \quad \phi(ab') = b'ab', \quad \phi(bb') = bb'a. \end{aligned}$$

Donc si $w_1 \in Q$, on doit avoir $w_1 \triangleleft \phi(w_1)$ et pour m_1 mot réduit représentant $\phi(w_1)$ en insérant un caractère b quelque part dans le mot $b'ab' (\in \mathcal{I})$. Alors m_1 a au exactement deux caractères dans $\{a; b\}$. C'est incompatible avec $\phi(ab) \triangleleft \phi(w_1)$. Donc $abb' \notin Q$. Le raisonnement montrant $ab'b \notin Q$ est analogue.

Montrons maintenant (3). Supposons que l'on ait $\zeta \in Q$ plein.

Cas $\phi(ab') = ab'a$:

Soit p le premier caractère de $\langle t, a, b \rangle$. (ainsi $p = a$ si t est pair et $p = b$ sinon) et \bar{p} l'autre caractère. Pour u un préfixe de $\langle t, a, b \rangle$, on note u^* l'unique suffixe de $\langle t, a, b \rangle$ tel que $\langle t, a, b \rangle = uu^*$. Commençons par faire la remarque suivante : pour tout préfixe u de $\langle t, a, b \rangle$,

$$(R) \begin{cases} \text{Si } (m_{bb'} = 2, t \text{ est impair}), \text{ alors} & (ub'u^* \notin H) \Leftrightarrow (u \in \{e; b\}). \\ \text{Sinon,} & (ub'u^* \notin H) \Leftrightarrow (u = e). \end{cases}$$

Considérons une occurrence quelconque de b' dans ζ , i.e. une écriture $\zeta = xb'y$, avec $l(\zeta) = l(x) + 1 + l(y)$. On sait (cf. la proposition 2.5 de [5]) que $[e, x] \cap \langle a, b \rangle$ a un plus grand élément ξ . Soit ξ^\sharp l'unique élément de $\langle a, b \rangle$ tel que l'on ait $M_{ab} = \xi\xi^\sharp$, $m_{ab} = l(\xi) + l(\xi^\sharp)$. Comme ζ est plein on a $\zeta \geq M_{ab}$. Par la remarque suivant la proposition 2.5 de [5], on en déduit $y \geq \xi^\sharp$. Définissons un élément ξ' de la manière suivante : si $p \in D_g(\xi)$, on pose $\xi' = \xi$ et sinon $\xi < M_{ab}$ donc ξ a une unique écriture réduite. Alors $D_g(\xi)$ est réduit à un singleton ξ_1 (ou est vide si $\xi = e$) et on pose alors $\xi' = \xi_1\xi$ (et $\xi' = e$ si $\xi = e$). Posons aussi $u = \min(\langle t, a, b \rangle, \xi')$.

Remarquons que u est toujours un préfixe de $\langle t, a, b \rangle$. Montrons maintenant par disjonction ce cas que $u^* \leq \xi^\sharp$: si $\langle t, a, b \rangle \leq \xi'$, on a $u = \langle t, a, b \rangle$ donc $u^* = e$. Si $\xi' < \langle t, a, b \rangle$ on a $u = \xi'$ donc $l(u^*) = t - l(u) = t - l(\xi') \leq t - l(\xi) + 1 \leq m_{ab} - 1 - l(\xi) = l(\xi^\sharp) - 1$ donc $u^* < \xi^\sharp$.

Finalement $u \leq \xi \leq x$, $u^* \leq \xi^\sharp \leq y$ donc $ub'u^* \leq \zeta$ et en particulier $ub'u^* \notin H$.

Vu la remarque plus haut, ceci donne $u \in \{e; b\}$. Notons que $u = e$ correspond à $\xi \in \{e; \bar{p}\}$ et que $u = b$ correspond à $\xi \in \{b; ab\}$. Distinguons deux cas suivant que $u = e$ pour toute occurrence de b' dans ζ ou que l'on puisse avoir $u = b$ parfois. Dans le premier cas on a constamment $u = e$, i.e. $\min(\xi', \langle t, a, b \rangle) = e$ donc $\xi' = e$ donc $\xi \in \{e; \bar{p}\}$. En particulier $\xi \not\geq p$, donc $x \not\geq p$: derrière une occurrence de b' dans ζ on ne peut avoir de p . Comme ζ est plein par rapport à $\{p; b'\}$, ceci implique $m_{p, b'} = 2$. Or, comme $p \in \{a; b\}$ et $m_{a, b'} \geq 3$, ceci implique $p = b$, c'est-à-dire t impair. On a donc : $m_{bb'} = 2$, t impair. Cette dernière assertion est également vraie dans le deuxième cas où u est parfois égal à b , par (R) directement. Donc, dans tous les cas :

On a $m_{bb'} = 2$, t est impair.

On peut écrire $\zeta = xb'y$ avec $y \in \langle a, b \rangle$, $l(\zeta) = l(x) + 1 + l(y)$. On vient de voir que le “ u ” de cette décomposition est dans $\{e; b\}$, donc le “ ξ ” est dans $\{e; a; b; ab\}$, donc $\xi \not\geq ba$, donc $x \not\geq ba$. Comme ζ est plein on a $x \neq e$; on peut alors réécrire ζ comme $\zeta = x'qb'y$ avec $q \in \{a; b\}$; $l(\zeta) = l(x') + 2 + l(y)$. On a $q \in \{a; b\}$. Quitte à permuter b et b' , on peut supposer $q \neq b$, donc $q = a$. Alors, comme $x \not\geq ba$ on a $x' \not\geq b$ donc $x' \in \langle a, b' \rangle$ donc $\zeta \in \langle a, b' \rangle < a, b \rangle$ puis, par la proposition 6.1.1, $\zeta \in \{\Gamma; \Gamma'\}$ comme cherché.

Cas $\phi(ab') \neq ab'a$:

Comme ζ est plein on a $\zeta \geq a$. On a une décomposition du type $\zeta = uav$, avec $u \in \langle b, b' \rangle$, $l(\zeta) = l(u) + 1 + l(v)$. Comme ζ est plein on a $v \neq e$. Alors le premier caractère q de v est dans $\{b; b'\}$; soit \bar{q} l'élément défini par $\{b; b'\} = \{q; \bar{q}\}$. On peut écrire $v = qw$ avec $l(v) = 1 + l(w)$. Alors comme $\zeta \not\geq aq\bar{q}$ on a $w \not\geq \bar{q}$ donc $w \in \langle a, q \rangle$. Donc $\zeta = u(aqw) \in \langle b, b' \rangle < a, q \rangle = \langle q, \bar{q} \rangle < a, q \rangle$; comme $m_{a, \bar{q}} \geq 3$, ζ ne peut être plein par rapport à $\{a; \bar{q}\}$. Q. E. D.

En appliquant cette proposition deux fois (la deuxième fois en échangeant les rôles de b' et b) on voit que quand $m_{bb'} > 2$, ϕ ne peut être plein que si β et β' sont tous deux des restrictions de $x \mapsto xa$; par le théorème 2.6 on a alors :

Proposition 6.3.2 *Si $m_{bb'} > 2$, ϕ est plein si et seulement si ϕ coïncide avec $x \mapsto xa$.*

On supposera $m_{bb'} = 2$ dans la suite de cette section.

Proposition 6.3.3 *Si ni β ni β' ne sont confondus avec $x \mapsto xa$, alors ϕ n'est pas plein.*

Preuve : Supposons par l'absurde que ϕ soit plein. Par la proposition 6.3.1, Q contient un unique élément plein de longueur $m_{ab} + m_{ab'} - 2$ (que l'on appellera N) à savoir $\Gamma_{b',a,b}$. En permutant b et b' , Q contient un unique élément plein de longueur $m_{ab} + m_{ab'} - 2$ (que l'on appellera N') à savoir $\Gamma_{b,a,b'}$. Comme on a $N \neq N'$, (remarquer par exemple que $bN' \triangleleft N'$ mais $N \triangleleft bN$) c'est absurde. Q. E. D.

Proposition 6.3.4 *Supposons que $\forall x, \beta'(x) = xa$ et que β n'est pas a -régulier à gauche. Alors ϕ n'est pas plein.*

Preuve : La condition “ β non a -régulier à gauche” se traduit par

$$\exists t \leq m_{ab} - 3, \beta([b, a, t]) = [b, a, t + 1], \beta([a, b, t + 1]) = [b, a, t + 2]$$

On prend t minimal. La proposition 6.3.1 nous dit que si ϕ est plein, alors Q contient $\Gamma_{b',a,b}$.

De plus, la proposition 6.1.2. montre que $ab'[b, a, t] \notin Q$; comme $ab'[b, a, t] \leq \Gamma_{b',a,b}$, c'est impossible car Q est filtrant décroissant. Q. E. D.

Proposition 6.3.5 *Supposons $m_{bb'} = 2$, ϕ différent de $x \mapsto xa$. On a équivalence entre*

- (1) ϕ est plein
- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{À échange de } b \text{ et } b' \text{ près, on a :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi|_{<a,b'>} \text{ est simplement la multiplication à droite par } a \\ \phi|_{<a,b>} \text{ est } a\text{-régulier à gauche} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Le cas échéant, Q contient exactement deux éléments pleins, à savoir $\Gamma_{b',a,b}$ et $\Gamma'_{b',a,b}$.

Preuve : L'implication (2) \Rightarrow (1) vient simplement de la proposition 4.3. Réciproquement, supposons (1). Par la proposition 6.3.3, β ou β' est confondu avec $x \mapsto xa$. Supposons par exemple qu'il s'agit de β' . La proposition 6.3.4

assure alors que β est a -régulier à gauche, d'où (2). Enfin, si l'un des termes de l'équivalence est réalisé, comme ϕ est différent de $x \mapsto xa$, on doit avoir β non confondu avec $x \mapsto xa$, et on peut dès lors utiliser la proposition 6.3.1. pour voir que les seuls (éventuels) éléments pleins de Q sont Γ et Γ' . Pour vérifier qu'ils sont effectivement dans Q , on invoque $\langle a, b' \rangle \langle a, b \rangle \subseteq Q$, qui provient de la proposition 4.3. (avec $X = \{a; b'\}$, $Y = \{a; b\}$) Q. E. D.

Il nous reste maintenant à examiner le cas dégénéré, i.e. le cas $\exists i \in \{b; b'\}$, $m_{ia} = 2$. Quitte à échanger b' et b , on peut supposer $m_{ab'} = 2$. Dans ce cas on distingue plusieurs sous-cas suivant les valeurs de $m_{bb'}$.

6.4 Étude du cas dégénéré en rang 3.

Dans cette section, on suppose donc $m_{ab'} = 2$. Règlons rapidement le cas $m_{bb'} = 2$ par la remarque claire suivante:

Remarque 6.4.1 *Si Supposons $m_{ab'} = m_{bb'} = 2$. Dans ce cas on a $W = \langle a, b \rangle \Pi b' \langle a, b \rangle$, et tout couplage est b' -régulier à gauche, donc défini sur tout W et plein.*

On suppose donc $m_{bb'} \geq 3$ dans la suite de cette section.

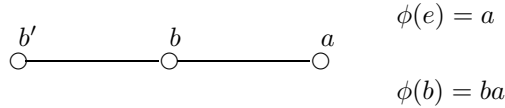


Figure 3 : Cas dégénéré

Proposition 6.4.2 *Supposons que β n'est pas confondu avec $x \mapsto xa$. Alors il existe $t \geq 2$ minimal tel que $\phi(\langle t, a, b \rangle) = \langle t+1, a, b \rangle$ (donc $m_{ab} \geq t+2$). Soit $H = \{w \in W ; l(w) = t+1, b' \leq w, \langle t, a, b \rangle \leq w, w \notin \{b'\langle t, a, b \rangle; \langle t, a, b \rangle b'\}\}$. Alors*

$$\forall w \in H, w \notin Q.$$

Preuve : Soit $w \in H$. Alors, grâce à $ab' = b'a$, w s'écrit $w = Cb'\langle 2j, a, b \rangle$, (où C est l'unique mot tel que $\langle t, a, b \rangle = C\langle 2j, a, b \rangle$. avec $0 \leq 2j \leq t-1$ (on aurait aussi bien pu prendre $2j+1$ au lieu de $2j$ dans l'écriture ci-dessus mais le $2j$ est plus pratique pour la suite). Soit $v \in \text{coat}(w)$. Si $v = \langle t, a, b \rangle$, on a $\phi(v) = \langle t+1, a, b \rangle \neq w$ et sinon $\phi(v) = va$ (par la proposition 2.5.) donc $\phi(v) \neq w$ car $a \notin D_d(w)$. Ainsi $w \notin \phi(\text{coat}(w))$, donc si $w \in Q$ on doit avoir $w \triangleleft \phi(w)$.

Les éléments $x_1 = Cb'\langle 2j-1, a, b \rangle$ et $x_2 = \langle t, a, b \rangle$ sont des coatomies de w , et comme $x_1 \triangleleft \phi(x_1)(=x_1a)$, $x_2 \triangleleft \phi(x_2)$, si $w \in Q$, $y = \phi(w)$ vérifie :

$$Cb'\langle 2j, b, a \rangle \triangleleft y ; \langle t+1, a, b \rangle \triangleleft y.$$

Considérons les mots $m_1 = Cb'\langle 2j, b, a \rangle$ et $m_2 = \langle t+1, a, b \rangle$. Si m est un mot réduit représentant y , alors on obtient m en rajoutant le caractère b' quelque part dans le mot m_2 : $m = Ub'V$ et $m_2 = UV$. Maintenant, l'élément $\phi(x_1)$ peut avoir plusieurs écritures réduites, mais il n'y en a qu'une qui comporte au plus un caractère b' , à savoir m_1 . Donc on doit avoir $U \geq u = C$ et $V \geq v = \langle 2j, b, a \rangle$. De plus $V \neq v$ (les derniers caractères diffèrent) et du fait des contraintes de longueur, $U = u$ et $V = vb$. Alors le dernier caractère de U coïncide avec le premier caractère de V , donc le mot $m_2 = UV$ n'est pas réduit, ce qui est absurde. Q. E. D.

Proposition 6.4.3 *Supposons $m_{bb'} \geq 4$ et $\phi(ab) = bab$, $m_{ab} \geq 4$. Alors $abb'b$ est un élément minimal de $W \setminus Q$.*

Preuve : Posons $w = abb'b$. On a :

$$\begin{aligned} \text{coat}(w) &= \{bb'b; abb'; ab'b\} \\ \phi(bb'b) &= bb'b\phi(e) = bb'ba \\ \phi(abb') &= \phi(ab)b' = babb' \\ \phi(ab'b) &= \phi(b'ab) = b'\phi(ab) = b'bab \end{aligned}$$

donc si $w \in Q$ on doit avoir

$$\text{coat}(\phi(w)) = \{b'bab; abb'b; bb'ba; babb'\}$$

ce qui est impossible (par exemple il n'existe pas de y tel que l'on ait à la fois $b'bab \triangleleft y$, $abb'b \triangleleft y$). Q. E. D.

Proposition 6.4.4 *Supposons $m_{bb'} = 3$ et $\phi(ab) = bab$, $m_{ab} \geq 4$. Alors $abb'ab$ est un élément minimal de $W \setminus Q$.*

Preuve : Posons $w = abb'ab$. On a :

$$\begin{aligned} \text{coat}(w) &= \{bb'ab; abab; abb'b; abb'a\} \\ \phi(bb'ab) &= bb'\phi(ab) = bb'bab \\ \phi(abb'b) &= \phi(b'abb') = b'\phi(ab)b' = b'babb' \\ \phi(abb'a) &= \phi(abab') = \phi(aba)b' \end{aligned}$$

donc si $w \in Q$ on doit avoir $w \triangleleft \phi(w) = y$ et $b'babb' \triangleleft y$, $bb'bab \triangleleft y$. Comme $b'babb' \in \mathcal{I}$, et que $bb'bab$ a exactement trois écritures réduites à savoir $bb'bab$, $b'bb'ab$ et $b'bab'b$, on en déduit $y = b'bab'bb'$ qui est incompatible avec $\phi(aba)b' \triangleleft y$. Q. E. D.

7 Cas général.

On considère maintenant un couplage maximal (Q, ϕ) sur un système de Coxeter (W, S) quelconque. On va progressivement montrer que ϕ est réductible dans tous les cas. Bien entendu, on peut supposer que ϕ est plein. Par le lemme 3.2, si $\langle J \rangle$ est un sous-groupe parabolique stable par ϕ , alors $\phi|_{\langle J \rangle \cap Q}$ reste plein, ce qui va nous permettre d'utiliser les résultats déjà obtenus en rang 3. Posons $a = \phi(e)$,

$$\begin{aligned} C &= \{s \in S ; sa = as\} \\ U &= \{s \in S \setminus C ; \phi(s) = sa\} \\ V &= \{s \in S \setminus C ; \phi(s) = as\} \end{aligned}$$

Commençons par traiter le cas dit “croisé” :

Proposition 7.1 *Supposons que ϕ est un couplage “croisé” (i.e. tel que $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$). Alors ϕ est réductible. Plus précisément, quitte à échanger U et V , quitte à échanger la gauche et la droite, on a :*

$$\begin{aligned} Q &= \langle U \cup C \rangle \langle V \cup C \rangle \cap Q \\ \forall (x, y) \in \langle U \cup C \rangle \times \langle V \cup C \rangle \cap Q, \quad \phi(xy) &= x\phi(y). \end{aligned}$$

Preuve : Disons que $u \in U$ est “inerte” si $\phi_{\langle a, u \rangle}$ est a -régulier à gauche, et que u est “fortement inerte” si $\phi_{\langle a, u \rangle}$ est simplement la restriction de $x \mapsto xa$ à $\langle a, u \rangle$. De façon symétrique, disons que $v \in V$ est inerte si $\phi_{\langle a, v \rangle}$ est a -régulier à droite, et que v est fortement inerte si $\phi_{\langle a, v \rangle}$ est simplement la restriction de $x \mapsto ax$ à $\langle a, v \rangle$.

Par la proposition 6.2.5, on voit que

$$\forall (u, v) \in U \times V, \begin{cases} (u \text{ est inerte, } v \text{ est fortement inerte}) \\ \text{ou} \\ (u \text{ est fortement inerte, } v \text{ est inerte}) \end{cases}$$

donc tous les éléments de $U \cup V$ sont inertes, et

$$\forall (u, v) \in U \times V, \quad u \text{ ou } v \text{ est fortement inerte}$$

d'où l'on déduit aisément que l'un des deux ensembles U, V n'est composé que d'éléments fortement inertes. Supposons par exemple que ce soit U .

Alors les théorèmes 4.3 et 5. donnent une égalité par double inclusion pour Q : le théorème 5. donne $Q \subseteq \langle U \cup C \rangle \langle V \cup C \rangle$, donc $Q \subseteq \langle U \cup C \rangle \langle V \cup C \rangle \cap Q$ car Q est décroissant, et le théorème 4.3 donne $\langle U \cup C \rangle \langle V \cup C \rangle \cap Q \subseteq Q$.

Expliquons maintenant pourquoi ceci implique que ϕ est réductible : soit ω une orbite pleine, $\omega = \{m; M\}$ avec $M = \phi(m)$ et M plein. Alors il existe $(x, y) \in (U \cup C) \times ((V \cup C) \cap Q)$ tels que $m = xy$, $M = x\phi(y)$. On peut supposer $l(m) = l(x) + l(y)$ par la règle de l'effacement. Il est facile de voir que pour

toute partie J de S contenant a , $\langle J \rangle \cap Q$ est stable par ϕ . En particulier $\phi(y) \in \langle V \cup C \rangle \cap Q$. Comme $U \neq \emptyset$ et M est plein, on en déduit $x \neq e$. Soit $x_1 \in D_g(x)$; alors x_1 est régulier à gauche (car $x_1 \in U \cup C$) et x_1 est dans l'ensemble de descente à gauche de m , donc l'orbite ω est réductible. Q. E. D.

Corollaire 7.2 *Tout couplage défini sur un groupe de Coxeter simplement enlacé est réductible.*

Preuve : Soit ϕ un tel couplage ; on peut prendre ϕ maximal est plein. Si ϕ est croisé, alors on utilise la proposition qui précède. Sinon, l'hypothèse sur le système de Coxeter implique que $\forall s \in S \setminus \{a\}$, $\forall x \in \langle a, s \rangle$, $\phi(x) = xa$, donc par le théorème 2.6 $\forall x \in W$, $\phi(x) = xa$ auquel cas le résultat est clair. Q. E. D.

Revenant au cas général, on voit que l'on peut toujours se ramener au cas ou par exemple $V = \emptyset$, i.e.

$$\forall s \in S, \phi(s) = sa.$$

En utilisant la proposition 6.3.3, on peut même supposer que pour tout $s \in S$ excepté au plus un élément,

$$\forall x \in \langle s, a \rangle, \phi(x) = xa.$$

Bien sûr, le cas non-trivial est le cas où il existe effectivement un élément (que l'on notera b) tel que $\exists x \in \langle a, b \rangle$, $\phi(x) \neq xa$. Changeant légèrement de notation afin de travailler avec des sous-ensembles disjoints de S , posons

$$\begin{aligned} C &= \{s \in S ; sa = as, s \neq a\} \\ U &= S \setminus (C \cup \{a; b\}) \end{aligned}$$

On est alors dans la situation suivante :

$$\begin{aligned} S &= C \amalg U \amalg \{a; b\} \\ \forall c \in C, ca &= ac, c \text{ est régulier à gauche et à droite} \\ \forall u \in U, m_{au} &\geq 3, ub = bu, u \text{ est régulier à gauche.} \end{aligned}$$

situation dont une bonne partie est résumée par le dessin suivant :

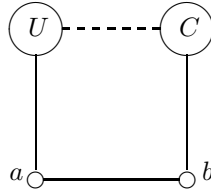


Figure 4

(pour le “ $ub = bu$ ” à la dernière ligne, utiliser la proposition 6.3.2). Notons $C' = \{c \in C ; m_{bc} \geq 3\}$, $C'' = C \setminus C' = \{c \in S ; sa = as, sb = bs\}$ et pour t entier,

$$T_t = \langle t, a, b \rangle$$

Comme ϕ n'est pas confondu avec $x \mapsto xa$ il existe t minimal tel que $\phi(T_t) \neq T_t a$, donc $t \leq m_{ab} - 2$ et $\phi(T_t) = T_{t+1}$. Notons, pour $x \in U \cup C'$,

$$H_x = \begin{cases} \{w ; T_t \triangleleft w, u \leq w, w \neq uT_t\} & \text{si } x = u \in U \\ \{w ; T_t \triangleleft w, c' \leq w, w \notin \{c'T_t; T_t c'\}\} & \text{si } x = c' \in C', t > 2, \\ \{abcb\} & \text{si } x = c \in C', t = 2, m_{bc} > 3 \\ \{abcab\} & \text{si } x = c \in C', t = 2, m_{bc} = 3. \end{cases}$$

On a alors, par les propositions 6.3.1, 6.4.2, 6.4.3 et 6.4.4 :

$$\text{Si } t \geq 2, \text{ on a } \forall x \in U \cup C', H_x \cap Q = \emptyset \quad (1)$$

Notons H la réunion des différents H_x . Supposons par l'absurde que ϕ n'est pas réductible. Alors $|S| > 2$ et il existe une orbite pleine non réductible, i.e. il existe $\zeta \in Q$ avec $\zeta \triangleleft \phi(\zeta)$, $\phi(\zeta)$ plein tel que ζ soit **irréductible**, i.e. tel que $D_g(\zeta)$ ne contienne pas d'élément régulier à gauche et $D_d(\zeta)$ ne contienne pas d'élément régulier à droite. Alors nous affirmons que $\zeta \geq \langle m_{ab} - 2, a, b \rangle$.

En effet, considérons l'ensemble $A = \{y \leq \zeta ; y \triangleleft \phi(y), \phi(y) \geq M_{ab}\}$. L'ensemble A est non vide car il contient ζ . Soit y_0 un élément minimal de A . On a $\phi(y_0) \geq M_{ab}$. Si $\phi(y_0) = M_{ab}$, comme le sous-groupe diédral principal $\langle a, b \rangle$ est stable par ϕ , y_0 est un élément de $\langle a, b \rangle$ de longueur $m_{ab} - 1$, donc $y_0 \geq \langle m_{ab} - 2, a, b \rangle$ puis $\zeta \geq \langle m_{ab} - 2, a, b \rangle$. Sinon on a $\phi(y_0) > M_{ab}$ et il existe alors z tel que $M_{ab} \leq z \triangleleft \phi(y_0)$. On sait que $z \in Z(\phi, y_0) = \{y_0\} \cup \phi(B)$ où l'on a posé $B = \{x \triangleleft y_0 ; x \triangleleft \phi(x)\}$. Or si $z = \phi(y_1)$ avec $y_1 \in B$, on aurait $y_1 \in A$ ce qui contredirait la minimalité de y_0 . Donc $z = y_0$. Alors $M_{ab} \leq y_0 \leq \zeta$ ce qui donne encore $\zeta \geq \langle m_{ab} - 2, a, b \rangle$.

Remarquons que le sous-groupe $G = \langle \{a, b\} \cup C'' \rangle$ de W est isomorphe au produit commutatif de groupes $\langle a, b \rangle \times \langle C'' \rangle$, et que de plus on a $\forall (x, y) \in \langle a, b \rangle \times C''$, $\phi(xy) = \phi(x)y$ donc la restriction de ϕ à G est réductible. En particulier $\zeta \notin G$. Ainsi ζ possède les propriétés suivantes :

$$(\zeta \geq \langle m_{ab} - 2, a, b \rangle, \zeta \text{ irréductible, } \zeta \notin \langle \{a, b\} \cup C'' \rangle) \quad (3)$$

Soit maintenant k un paramètre entier tel que $t \leq k \leq m_{ab} - 2$ et $k \equiv t \pmod{2}$ (on peut toujours trouver des k vérifiant l'ensemble de ces conditions, par exemple $k = t$). On a une décomposition

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = ud_1x_1d_2x_2 \dots d_{k-1}x_{k-1}d_kv, \\ l(\zeta) = l(u) + \sum_i l(x_i) + l(v) + k \\ d_1d_2 \dots d_k = \langle k, a, b \rangle \text{ (égalité caractère à caractère).} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Nous allons montrer qu'on peut en fait supposer $\forall i \in [1, k-1]$, $x_i = e$ dans cette décomposition. Montrons ceci par récurrence sur i ; pour chaque i on considère une écriture de la forme (4) dans laquelle on a déjà $\forall j < i$, $x_j = e$ (hypothèse de récurrence) et dans laquelle aussi $l(x_i)$ est minimal. On suppose par l'absurde $x_i \neq e$ et on prend $s \in D_g(x_i)$.

Remarquons d'abord que $s \notin \{a; b\}$ car sinon comme l'écriture $d_i x_i$ est réduite on a nécessairement $s = d_{i+1}$, et en remplaçant $(d_i, x_i, d_{i+1}, x_{i+1})$ par $(d_i, e, d_{i+1}, (d_{i+1} x_i) d_{i+1} x_{i+1})$ (étant compris que x_{i+1} s'appelle v si $i = k-1$) on contredit la minimalité de $l(x_i)$.

Supposons $s \in U$. Alors t est impair, par le corollaire 6.III.2. En particulier $d_1 = b$ car $k \equiv t \pmod{2}$. Si $i = 1$ on contredit la minimalité de x_1 en remplaçant (u, x_1) par (us, sx_1) . Si $i > 1$ alors $\zeta \geq h = d_1 \dots d_i s d_{i+1} \dots d_t \in H$ contredit (1) (cas extrême : si $i \geq t$ on a $h = d_1 \dots d_t s = \langle t, a, b \rangle s$).

Supposons $s \in C'$. Si $i > 1$ (ce cas n'existant que quand $t \geq 3$) alors en posant $h = d_1 \dots d_i s d_{i+1} \dots d_t$ si $i \leq t-1$ et $h = d_1 \dots d_{t-1} s d_k$ si $i \geq t$, à chaque fois $\zeta \geq h \in H$ contredit (1). Reste le cas $i = 1$. Si $d_1 = a$, on obtient une contradiction sur la minimalité de x_1 en remplaçant (u, x_1) par (us, sx_1) . Sinon $d_1 = b$, donc t et k sont impairs, (et en particulier $t \geq 3$) alors en posant $h = d_1 s d_2 \dots d_t$ la relation $\zeta \geq h \in H$ contredit (1).

Enfin, si $s \in C \setminus C'$, ce qui veut dire que s commute à la fois avec a et b , alors en remplaçant (u, x_i) par (us, sx_i) on contredit la minimalité de x_i .

Dans tous les cas on est arrivé à obtenir une contradiction ; c'est donc que $\forall i$, $x_i = e$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = u \langle k, a, b \rangle v, \\ l(\zeta) = l(u) + k + l(v) \end{array} \right\} \quad (5)$$

Nous affirmons que $v \in \langle a, b \rangle$. En effet, si $v = e$ c'est vrai ; sinon prenons $s \in D_d(v)$; on peut écrire $v = v' s$ avec $v' < v$. On a $s \notin U$ car $\forall y \in U$, $\langle t, a, b \rangle y \in H$. De plus $s \notin C$ car $D_d(\zeta)$ ne contient pas d'éléments réguliers à droite. Donc $s \in \{a; b\}$. Supposons $s = b$. Alors $\text{supp}(v') \cap (U \cup C') = \emptyset$ (sinon, si $c \in \text{supp}(v') \cap (U \cup C')$, on a $\zeta \geq d_1 \dots d_{t-1} c b \in H$ qui est exclu par (1)). Donc $\text{supp}(v') \subseteq \{a; b\} \cup C''$; donc v' s'écrit $v' = v'' c$ avec $l(v) = l(v'') + l(c)$, $v'' \in \langle a, b \rangle$, $c \in C''$. On a alors $\zeta = u \langle t, a, b \rangle v'' b c$. Comme $D_d(\zeta)$ ne contient pas d'éléments réguliers à droite, cela donne $c = e$ donc $v = v'' b \in \langle a, b \rangle$. Reste à traiter le cas $s = a$. Si $v = a$ on a encore $v \in \langle a, b \rangle$. Sinon on prend $s_2 \in D_d(v')$ et on note $v'' = v' s_2$. Alors $s_2 \notin U$ (car $\forall y \in U$, $\langle t, a, b \rangle y \in H$) et $s_2 \in C$ donnerait $\zeta = u \langle t, a, b \rangle v'' a s_2$, d'où un élément régulier à droite dans $D_d(\zeta)$, ce qui est exclu. Donc $s_2 \in \{a; b\}$, et comme le mot $s_2 s = s_2 a$ est réduit on a $s_2 = b$. En refaisant alors le raisonnement fait pour le cas $s = b$ décalé d'un indice, on finit de vérifier que $v \in \langle a, b \rangle$ dans tous les cas.

Comme $\zeta \not\leq \{a, b\} \cup C'' >$ il existe $s \notin \{a; b\} \cup C''$ dans le support de u : on a donc $s \in U \cup C'$. Soit $u_1 \in D_g(u)$ et $u' = u_1 u$. Comme u_1 n'est pas régulier à gauche on a $u_1 \in \{a; b\}$.

Supposons t impair et $u_1 = a$. Alors a n'est pas régulier à gauche, ce qui implique déjà $U = \emptyset$ par la proposition 6.3.1. Donc $s \in C'$. De plus, si $u_2 \in C$ alors $D_g(\zeta)$ contiendrait un élément régulier à gauche à savoir u_2 : impossible. Donc $u_2 \in \{a; b\}$ puis $u_2 = b$. Alors $\zeta \geq bsd_2 d_3 \dots d_t \in H$ ce qui contredit (1).

Supposons t impair et $u_1 = b$. Comme on sait que $\forall y \in C', byd_2 \dots d_t \notin H$, on voit que $\text{supp}(u) \cap C' = \emptyset$, et en particulier $s \in U, u_2 \notin C'$. Si $u_2 \in U \cup C''$ alors $D_g(\zeta)$ contiendrait un élément régulier à gauche à savoir u_2 : impossible. Donc $u_2 \in \{a; b\}$ puis $u_2 = a$. Alors $\zeta \geq basd_2 d_3 \dots d_t \in H$ ce qui contredit (1).

Supposons t pair et $u_1 = b$. Alors b n'est pas régulier à gauche, donc on a $r \leq m_{ab} - 3$ minimal tel que $\phi([a, b, r]) = \phi([a, b, r + 1])$ et $\phi([b, a, r + 1]) = \phi([a, b, r + 2])$. Comme t est pair, on a $r \geq t + 2$. Posons $k = r$ si r est pair et $k = r + 1$ sinon ; alors k vérifie les hypothèses précisées au début de cette démonstration, et de plus $k > r$ donc $\langle k, a, b \rangle > [a, b, r]$ puis $\zeta \geq bu'[a, b, r]$. Par la proposition 6.1.3, $\forall y \in C', by[a, b, r] \notin Q$; on en déduit $\text{supp}(u') \cap C' = \emptyset$, et en particulier $s \in U, u_2 \notin C'$. Si $u_2 \in U$ alors $D_g(\zeta)$ contiendrait un élément régulier à gauche à savoir u_2 : impossible. Finalement $u_2 \in \{a; b\}$, puis $u_2 = a$. Alors $\zeta \geq asd_2 d_3 \dots d_t \in H$ ce qui contredit (1).

Supposons t pair et $u_1 = a$. Alors a n'est pas régulier à gauche, ce qui donne $U = \emptyset$ par la proposition 6.3.1. Donc $s \in C'$. Si $u_2 \in C$ alors $D_g(\zeta)$ contiendrait un élément régulier à gauche à savoir u_2 : impossible. Donc $u_2 \in \{a; b\}$ puis $u_2 = b$. Alors en posant $h = absd_2$ si $t = 2$ et $m_{bs} > 3$, $h = absd_1 d_2$ si $t = 2$ et $m_{bs} = 3$, et $h = absd_1 d_2 \dots d_{t-2}$ si $t > 2$, on a dans tous les cas $\zeta \geq h \in H$ ce qui contredit (1).

Donc, au bout du compte :

Théorème 7.3 *Pour tout système de Coxeter (W, S) , tout couplage distingué sur W est réductible.*

En combinant avec la proposition 3.5, on obtient immédiatement :

Corollaire 7.4 *Soit (W, S) un système de Coxeter, ϕ un couplage distingué de W , $x, y \in W$ tels que $x \triangleleft \phi(x)$, $y \triangleleft \phi(y)$. Alors*

$$R_{\phi(x), \phi(y)} = R_{x, y} \tag{7.4.1}$$

$$R_{x, \phi(y)} = (q - 1)R_{x, y} + qR_{\phi(x), y} \tag{7.4.2}$$

Bien que nous n'en ayons pas eu besoin ici, il est intéressant de faire la remarque suivante (on note $\mathcal{M}(W)$ l'ensemble des couplages maximaux d'un

groupe de Coxeter W et pour $a \in S$, $\mathcal{M}_a(W) = \{\phi \in \mathcal{M}(W) ; \phi(e) = a\}$:

Proposition 7.5 *Soit (W, S) un système de Coxeter et $a \in S$. Alors les seuls éléments de $\mathcal{M}_a(W)$ définis sur tout W sont les multiplications à gauche et à droite par un a , sauf dans le cas dégénéré*

$$S = \{a; b\} \amalg C, \forall c \in C, m_{ac} = m_{bc} = 2.$$

Dans ce cas, W est isomorphe au produit commutatif de groupes de Coxeter $\langle C \rangle \times \langle a, b \rangle$, tous les éléments de $\mathcal{M}_a(W)$ sont $\langle C \rangle$ -réguliers (i.e. vérifient $\forall c \in \langle C \rangle, \forall x \in Q, cx \in Q, \phi(cx) = c\phi(x)$) donc définis sur tout W . De plus, l'opération de restriction sur $\langle a, b \rangle$ réalise une bijection de $\mathcal{M}_a(W)$ sur $\mathcal{M}_a(\langle a, b \rangle)$.

Preuve : Soit $\phi \in \mathcal{M}_a(W)$. Posons $C = \{s \in S ; sa = as\}$, $U = \{s \in S \setminus C ; \phi(s) = sa\}$, $V = \{s \in S \setminus C ; \phi(s) = as\}$. Dans le cas “croisé”, i.e. $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, alors par la proposition 7.1. $Q \subseteq \langle U \cup C \rangle \langle V \cup C \rangle$, donc pour $u \in U$, $v \in V$ on a $vau \notin Q$ donc $Q \neq W$. On peut donc supposer $V = \emptyset$, i.e. $\forall s \in S, \phi(s) = sa$. Si ϕ n'est pas confondu avec le couplage c_a de multiplication à droite par a , par le théorème 2.6 on a $b \in S \setminus \{a\}$ tel que $\phi_{\langle a, b \rangle}$ ne soit pas une restriction de c_a , donc tel que $\exists t \leq m_{ab} - 2, \phi(\langle t, a, b \rangle) = \langle t + 1, a, b \rangle$. Alors si $U \neq \emptyset$, on a pour $u \in U$, $\langle t, a, b \rangle u \notin Q$ par la proposition 6.3.1. On peut donc supposer $U = \emptyset$. Ainsi $S \subseteq \{a; b\} \cup C''$ avec $C'' = C \setminus \{a\}$. Notons $C' = \{c \in C'' ; c \neq b, m_{bc} > 2\}$. Supposons $C' \neq \emptyset$, et prenons $c \in C'$.

Si $t > 2$, on a $\langle t - 1, b, a \rangle cb \notin Q$. Si $t = 2$ et $m_{bc} > 3$ on a $abcb \notin Q$ par la proposition 6.4.3. Si $t = 2$ et $m_{bc} = 3$ on a $abcab \notin Q$ par la proposition 6.4.4. Cette disjonction de cas montre que $Q \neq W$ dès que $C' \neq \emptyset$.

On peut donc supposer $C' = \emptyset$, c'est-à-dire qu'on est dans le cas dégénéré mentionné par l'énoncé. Le reste de la proposition est clair. Q. E. D.

Remerciements

Je remercie chaleureusement mon directeur de thèse Fokko du Cloux qui m'a aidé tout au long de la préparation de cet article et qui s'est également chargé du travail de relecture et de correction des versions préliminaires de ce texte.

Bibliographie

[1] F. Brenti. A combinatorial formula for Kazhdan-Lusztig polynomials, *Invent. Math.*, **118** : 371-394, 1994.

- [2] F. Brenti. The intersection cohomology of Schubert varieties is a combinatorial invariant, *Europ. J. Combin.*, in press.
- [3] F. du Cloux. An abstract model for Bruhat intervals. *Europ. J. Combin.*, **21** : 197-222, 2000.
- [4] F. du Cloux. **Coxeter**, version beta. Disponible sur <http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/ducloux>
- [5] F. du Cloux. Rigidity of Schubert closures and invariance of Kazhdan-Lusztig polynomials. *Adv. in Math.* , **180** : 197-222, 2003.
- [6] F. du Cloux. A transducer approach to Coxeter groups, *J. of Symb. Comp*, **27** : 1-14, 1999.
- [7] M. Dyer. Hecke Algebras and reflections in Coxeter groups. PhD thesis, University of Sydney, 1987.
- [8] J. E. Humphreys. Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [9] W. C. Waterhouse. Automorphisms of the Bruhat ordering on Coxeter groups. *Bull. London Math. Soc.*, **21** : 243-248, 1989.